

Zahlentheorie.

Champernowne, D. G.: The construction of decimals normal in the scale of ten. J. London Math. Soc. 8, 254—260 (1933).

Ein Dezimalbruch S ist normal in der Zahlenreihe, wenn für beliebige Gruppen λ_q von q Ziffern die Anzahl $G(x)$, der unter den x ersten Ziffern von S vorkommenden Gruppen λ_q , der Bedingung $G(x) = 10^{-q}x + o(x)$, bei $x \rightarrow \infty$, für jedes q genügt. — Es wird gezeigt, daß sich solche Dezimalbrüche sehr einfach konstruieren lassen, wie dies z. B. für $S = 0,123456789101112 \dots$ der Fall ist. Karamata (Beograd).

Iyanaga, S.: Sur un lemme d'arithmétique élémentaire dans la démonstration de la loi générale de réciprocité. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 728—730 (1933).

Bei dem Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes von Artin wird folgender Hilfssatz benötigt: Gegeben seien die ganzen rationalen Zahlen $a > 1$ und n . Es gibt unendlich viele zu verschiedenen Primzahlen gehörige Primzahlpotenzen q , derart, daß der Exponent, zu dem $a \pmod{q}$ gehört, durch n teilbar ist. Für diesen Hilfssatz gibt Verf. einen neuen elementaren Beweis. Bessel-Hagen (Bonn).

Schmidt, Theodor: Über die Zerlegung des n -dimensionalen Raumes in gitterförmig angeordnete Würfel. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 1, 186 bis 212 (1933).

Das Problem, um das es sich handelt, ist die Minkowskische Vermutung: Wenn in einem unimodularen System von linearen homogenen Formen bei ganzzahliger nicht-trivialer Wahl der Veränderlichen niemals alle Formen kleiner werden als 1, so hat eine der Formen lauter ganzzahlige Koeffizienten ohne gemeinsamen Teiler. Verf. zeigt die Richtigkeit der Vermutung unter der zusätzlichen Annahme der „Primbedingung“, daß der Hauptnenner der Koeffizienten jeder Zeile zu dem Hauptnenner der entsprechenden Unterdeterminanten teilerfremd ist. Zum Beweise kann man annehmen, daß alle Koeffizienten rational sind. Dann kann man in der üblichen Weise durch eine unimodulare ganzzahlige Transformation erreichen, daß alle Koeffizienten oberhalb der Hauptdiagonale Null sind. Setzt man jetzt die erste Veränderliche $y_1 = 0$, so erhält man ein $(n-1)$ -dimensionales Gitter, wenn man alle übrigen y_i alle ganzen Zahlen durchlaufen läßt. Dieses Gitter nennt Verf. einen „Raster“. Mit diesem Begriff wird auf geometrischem Wege der Beweis geführt. Die Schwierigkeit ist somit in den Beweis der Primbedingung verlegt. Verf. beweist außerdem die Vermutung für $n = 7$. O.-H. Keller (Berlin).

Albert, A. A.: A note on the Dickson theorem on universal ternaries. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 585—588 (1933).

The author generalizes Dickson's Theorem that every integral ternary quadratic form which represents all integers for integral values of its variables represents zero properly (for another brief proof, see Ross, this Zbl. 7, 55). By the homogeneity the variables may be supposed merely rational. It is shown that a ternary quadratic form f of non-zero determinant d , with coefficients in a non-modular field F , represents all elements of F for values in F of its variables, if and only if f represents zero, with values not all zero of the variables in F . The problem is reduced to that for the form

$$\psi(x, y, z) = ax^2 + by^2 - abz^2.$$

If $\psi(x, y, z) = 1$, then $\psi(1 - ax^2, az - axy, y - axz) = 0$, where, save in a trivial case, one of the arguments is not zero; proving Dickson's Theorem. Again, if $\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ and either ξ or η is not zero, say $\xi \neq 0$, then

$$\psi((\sigma + a^{-1})\xi, (\sigma - a^{-1})\eta, (\sigma - a^{-1})\zeta) = 4\sigma\xi^2,$$

whence every element σ of F is represented. In the footnote, p. 588, read $j^2 = b$. To avoid a certain confusion of the terms "universal" and "universal over F ", Theorem 3 should conclude: f is "universal over F " if and only if f represents $-d$ for values of its variables in F . G. Pall (Montreal).

Nagell, Trygve: Über quadratische Kongruenzen mit zwei Unbekannten. Ark. Mat. Astron. Fys. 24 A, Nr 3, 1—7 (1933).

It is proved in this note that the congruence

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \equiv 0 \pmod{p} \quad (1)$$

is soluble for all primes p , except a finite number, if and only if the equation $f(x, y) = 0$ does not represent two parallel irrational straight lines (real or complex). A line $ax + by + c = 0$ is called irrational if there exists no d such that ad, bd, cd are rational. The proof is very simple: it consists of reducing (1) to a normal form and enumerating the possible cases. — It is further shown that if (1) is soluble, so is the corresponding congruence $\text{mod } p^\mu$, for every positive integer μ , except for a finite number of primes p . As an application it is shown that the necessary and sufficient condition that the congruence $x^2 + Cy^2 + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ shall be soluble for all N is that $-C$ shall be representable as the sum of two relatively prime squares. Davenport (Cambridge).

Brunner, Otto: Lösungseigenschaften der kubischen diophantischen Gleichung $z^3 - y^2 = D$. Zürich: Diss. 1933. 91 S.

Es handelt sich um Lösungen der Gleichung $z^3 - y^2 = D$ in rationalen, nicht notwendig ganzen Zahlen, oder was damit gleichbedeutend ist, der Gleichung $z^3 - y^2 = Dt^6$ in ganzen rationalen Zahlen x, y, z ohne gemeinsamen Teiler. Fueter hatte früher unter gewissen Voraussetzungen über die Zahl D die Unlösbarkeit dieser diophantischen Gleichung bewiesen. Verf. nimmt das Thema erneut auf, beweist die Unlösbarkeit der Gleichung unter schwächeren Voraussetzungen, als es Fueter getan hatte, und bringt zahlreiche weitere, auch numerische, Einzelheiten zur Theorie der in Frage stehenden Gleichung bei. Die einzigen Hilfsmittel der Untersuchung sind bekannte Sätze aus der Lehre der algebraischen Zahlkörper. Bessel-Hagen (Bonn).

Hattori, Hiroshi: Some properties of the elementary symmetric functions of the roots of the congruence $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ in $K(\sqrt{m})$. Tôhoku Math. J. 37, 160—163 (1933).

Der Verf. überträgt Ergebnisse und Methoden seiner früheren Arbeit [Tôhoku Math. J. 34 (1931); dies. Zbl. 2, 181], die sich auf ganze Zahlen bezogen, auf den Körper $K(\sqrt{m})$. Ist n ganz rational, p eine rationale Primzahl und \mathfrak{p} ein Primideal von $K(\sqrt{m})$, so gilt der Satz: Wenn n ein Teiler von $\varphi(\mathfrak{p})$ ist und s_1, s_2, \dots, s_n inkongruente Wurzeln von $x^n \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ sind, so ist

$$A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \cdots \equiv A_{n-1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{und} \quad A_n \equiv (-1)^{n+1} \pmod{\mathfrak{p}},$$

wobei A_1, A_2, \dots, A_n als elementarsymmetrische Funktionen von s_1, \dots, s_n durch $(x - s_1) \cdot (x - s_2) \cdots (x - s_n) = x^n - A_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n A_n$ definiert sind. — Ist $[1, \omega]$ kanonische Basis und $N(\mathfrak{p}) = p$ bzw. $N(\mathfrak{p}) = p^2$, so bilden bekanntlich die Zahlen $\varrho_{ab} = a$ ($a = 0, 1, \dots, p-1$) bzw. die Zahlen $\varrho_{ab} = a + b\omega$ ($a = 0, 1, \dots, p-1$ und $b = 0, 1, \dots, p-1$) ein vollständiges Restsystem $\text{mod } \mathfrak{p}$. Ist nun $n \geq 4$ und gerade und wählt man s_1, s_2, \dots, s_n unter den ϱ_{ab} , so gilt sogar

$$A_3 \equiv A_5 \equiv \cdots \equiv A_{n-1} \equiv 0 \pmod{p \cdot \mathfrak{p}}. \quad \text{Neß (Kiel).}$$

Perron, Oskar: Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, insbesondere im Körper $K(i\sqrt{2})$. Math. Z. 37, 749—767 (1933).

Sei D eine quadratfreie natürliche Zahl, d ihr kleinster positiver Rest mod 4. Die untere Grenze der positiven Zahlen γ , für die bei jeder komplexen Zahl α , die nicht im imaginär-quadratischen Körper $\mathfrak{K}(\sqrt{-D})$ liegt, die Ungleichung $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\gamma}{q^2}$ unendlichviele Lösungen in Paaren ganzer Zahlen p, q aus $\mathfrak{K}(\sqrt{-D})$ hat, heiße $\psi(D)$.

Es wird gezeigt, daß

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \leq \psi(D) \leq \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{2D} & \text{für } D \equiv 3 \pmod{4}, \quad D \neq 1, \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{2D} & \text{für } D \equiv 3 \pmod{4}, \quad D \neq 3, \end{cases}$$

ist; die linke Hälfte folgt durch Betrachtung der Zahl $\frac{\sqrt{-D} \mp i\sqrt{d}}{2}$, die rechte mittels des Minkowskischen Satzes über konvexe Körper. Weiter wird gezeigt, daß $\psi(D)$ auch die untere Grenze der positiven Zahlen γ ist, so daß zu jeder quadratischen Form $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ mit komplexen Koeffizienten und $b^2 - 4ac \neq 0$, die in $\mathbb{R}(\sqrt{-D})$ höchstens einen Linearfaktor hat, unendlichviele Paare ganzer x, y aus $\mathbb{R}(\sqrt{-D})$ mit $0 < |f(x, y)| \leq \gamma \sqrt{|b^2 - 4ac|}$ existieren. — Nach früheren Ergebnissen des Verf. ist $\psi(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\psi(3) = \frac{1}{\sqrt[4]{13}}$. Als neues Resultat wird $\psi(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

nachgewiesen und gezeigt, daß für $\gamma < \psi(2)$ die Ungleichung $\left| \frac{i+1}{\sqrt{2}} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\gamma}{|q|^2}$ nur endlichviele Lösungspaare in $\mathbb{R}(\sqrt{-2})$ hat; dem entspricht, daß die Formenklasse $x^2 + \sqrt{-2}xy - y^2$ der Diskriminante 2 und nur diese für Zahlen $x, y \neq 0, 0$ aus $\mathbb{R}(\sqrt{-2})$ absolut mindestens 1 ist. Der Beweis von $\psi(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ benutzt folgenden Satz über Cassinische Kurven: „Ist $|a| \leq \frac{1}{2}$, so gibt es zu jeder komplexen Zahl z_1 eine Zahl $z \equiv z_1$ [d. h. $z - z_1$ ist ganz in $\mathbb{R}(\sqrt{-2})$], so daß

$$\min \left(\left| z^2 - a \right|, 2 \left| \left(z - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - a \right|, 2 \left| \left(z + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - a \right| \right) \leq \max \left(\sqrt{\frac{17}{24} + |a|^2}, \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2} \right)$$

ist. Das Gleichheitszeichen ist nötig nur für $a = \frac{1}{2}$, $z \equiv 1/\sqrt{2}$.“ Vgl. zu dem Beweis dies. Zbl. 2, 13 und 4, 245. Mahler (Manchester).

Koksma, J. F.: Asymptotische Verteilung reeller Zahlen modulo 1. *Mathematica, Leiden* 1, 245–248 (1932); 2, 1–6 u. 107–114 (1933) [Holländisch].

Wird für $0 \leq \gamma \leq 1$ bei ganzem $N \geq x_0$ (x_0 fest ≥ 1) die Anzahl der ganzen x , wozu ein ganzes y existiert, mit

$$0 \leq f(x) - y < \gamma; \quad x_0 \leq x \leq N \quad (1)$$

mit N_γ bezeichnet, so mögen die Ausdrücke

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_\gamma}{N} = \varphi(\gamma); \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_\gamma}{N} = \Phi(\gamma)$$

die untere bzw. obere Verteilungsfunktion (mod. 1) von $f(x)$ heißen. Es wird nun elementar bewiesen (und nachher angewendet): Satz: Ist $f(t)$ für $t \geq x_0$ stetig, monoton mit $f(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ und gilt für die Umkehrfunktion $F(u)$ von $f(t)$:

$F(q+1) - F(q) \rightarrow \infty$, $(F(q+\gamma) - F(q))/(F(q+1) - F(q)) \rightarrow \psi(\gamma)$, ($0 \leq \gamma \leq 1$) falls q die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft, dann gelten, wenn

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{F(q)}{F(q+\gamma)} = \chi(\gamma) \quad (0 \leq \gamma \leq 1)$$

gesetzt wird, die folgenden Behauptungen. 1. Die untere und obere Verteilungsfunktion (mod. 1) von $f(x)$ sind bzw. gleich

$$\varphi(\gamma) = \psi(\gamma); \quad \Phi(\gamma) = 1 - \chi(\gamma) \{1 - \psi(\gamma)\}. \quad (0 \leq \gamma \leq 1)$$

2. Sind γ und Ω beliebig, fest, mit $0 \leq \gamma \leq 1$, $\varphi(\gamma) \leq \Omega \leq \Phi(\gamma)$, so gibt es eine Folge natürlicher Zahlen N mit $N_\gamma/N \rightarrow \Omega$, wo N_γ die Anzahl der ganzen x mit (1) darstellt.

Koksma (Amsterdam).

Segal, B. I.: Sur la distribution des valeurs d'une certaine fonction. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 4, 37–48 (1933) [Russisch].

Segal, B. I.: Sur un théorème général de la théorie additive des nombres. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 4, 49–62 (1933) [Russisch].

Hauptziele sind die folgenden Sätze: I. (Erste Abhandlung.) Es sei $r \geq 3$, $N > 1$, $k > 6$, $K > r$ — alles ganz; $X = \frac{\log N}{\log \log N}$; $\alpha = \frac{(r-2)(k-2r+1)}{12k}$ für $3 \leq r < 8$, $k > 2r$; $\alpha = \frac{k-15}{2(k+1)}$ für $r=8$, $k > 15$; $\alpha = \frac{k-2r+1}{2k}$ für $r > 8$, $k > 2r+4$; $I_N = I_N(r, k, K)$ die Anzahl der Gitterpunkte (x_1, x_2, \dots, x_r) im Bereiche

$$Ne^{-X-\alpha} \leq x_1 x_2 x_3 \dots x_r x_r \leq Ne^{X-\alpha},$$

$$K^{-1}X \leq x_1 \leq X, \quad K^{-1}X \leq x_2 \leq X, \dots, \quad K^{-1}X \leq x_r \leq X.$$

Für feste r, k, K und wachsendes N ist dann

$$I_N = \frac{2}{(r-1)!} \left(1 - \frac{r}{K}\right)^{r-1} \frac{X^{r-1-\alpha}}{\log X} + O\left(\frac{X^{r-1-\alpha} \log \log X}{\log^2 X}\right).$$

II. (Zweite Abhandlung.) Es sei $n \geq 1$, $r > n^2 2^n$, $N > 1$ — alles ganz; $K > \sqrt[n]{2r}$, $X = \sqrt[n]{\frac{2n \log N}{\log \log N}}$; $\alpha = \frac{1}{(n+2)^2 2^n}$; $I_N = I_N(n, r, K)$ die Anzahl der Gitterpunkte (x_1, x_2, \dots, x_r) im Bereiche

$$Ne^{-X-\alpha} \leq x_1^{x_1^n} x_2^{x_2^n} \dots x_r^{x_r^n} \leq Ne^{X-\alpha},$$

$$K^{-1}X \leq x_1 \leq X, \quad K^{-1}X \leq x_2 \leq X, \dots, \quad K^{-1}X \leq x_r \leq X.$$

Für feste n, r, K und wachsendes N ist dann, mit einem geeigneten $L = L(n, r, K) > 0$,

$$I_N \sim L \frac{X^{r-n-\alpha}}{\log X}.$$

I und II sind quantitative Verschärfungen folgender Aussagen: Zu jedem N gibt es ein geeignetes Produkt Q 1. dreier Faktoren der Gestalt x^n oder 2. von $n^2 2^n + 1$ Faktoren der Gestalt x^{x^n} , so daß $N/Q \rightarrow 1$.

Verf. hatte schon eine Behauptung von der Art I aufgestellt, aber fehlerhaft begründet (vgl. dies. Zbl. 5, 153). Auch die vorliegenden Arbeiten sind nicht einwandfrei. Das liegt vor allem daran, daß es S. 40, Zeile 1 von unten und S. 53, Zeile 3 von unten heißen muß:

$\frac{\log N}{\log X - \log K} \leq$; S. 41, Zeile 2 von oben und S. 53, Zeile 1 von unten $\frac{\log N}{\log X} \leq$. Rechnet man weiter, so kommen an den betreffenden Stellen nicht einmal die Hauptglieder heraus. Auch sonst gibt es zahlreiche Fehler.

A. Walfisz (Radoś, Polen).

Skewes, S.: On the difference $\pi(x) - li(x)$ (I). J. London Math. Soc. 8, 277–283 (1933).

If $\pi(x)$ is the number of primes not exceeding x , and $li(x)$ is the logarithmic integral, a well-known theorem of Littlewood states that $\pi(x) - li(x)$ changes sign infinitely often as $x \rightarrow \infty$. But $\pi(x) < li(x)$ for all values of x for which the functions have actually been calculated, and Littlewood's proof does not assign any definite number x_0 such that $\pi(x) > li(x)$ for $x < x_0$. This is due to a corresponding failure in the Phragmén-Lindelöf theorem used in the proof. In this paper the author shows how to adapt Littlewood's argument so as to give a precise result, and states that the

above property holds for $x_0 = e^{e^{79}} = 10^{10^{34}}$ approximately. E. C. Titchmarsh.

Analysis.

Cinquini, Silvio: Sopra una formula di Curtiss. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 12, 153–171 (1933).

Eine von R. D. Curtiss herrührende Ausdehnung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf analytische Funktionen einer komplexen Variablen wird auf höhere Differenzenquotienten verallgemeinert.

E. Hopf (Watertown).

Laboeetta, Letterio: Ancora sulla definizione delle funzioni nei punti corrispondenti a certi limiti singolari di esse. Boll. Un. Mat. Ital. **12**, 232—237 (1933).

Lijn, G. van der: Une définition descriptive de l'intégrale. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 395—400 (1933).

Maeda, Fumitomo: Repeated integrals in metric space. Tôhoku Math. J. **37**, 446 bis 453 (1933).

Let R_1 and R_2 be metric spaces, $\beta_1(A_1)$ and $\beta_2(A_2)$ completely additive, nonnegative functions of normal sets [a set A is normal with respect to β if for every $\varepsilon > 0$ there exists an open set O_ε containing A , such that $\beta(O_\varepsilon) - \beta(A) < \varepsilon$] which are uniformly monotone (see this Zbl. **6**, 403). Let R^* be the composite metric space (R_1, R_2) . Then the product $\beta_1(E_1) \beta_2(E_2)$ gives rise by the usual greatest lower bound method to an upper "measure" and in turn a completely additive nonnegative function of normal sets $\beta^*(A^*)$, which is uniformly monotone on R^* . The extension of Fubini's theorem, that if $A^* = (A_1, A_2)$ and if $\int f d\beta^*$ exists, then $\iint_{A_1 A_2} f(a_1, a_2) d\beta_1 d\beta_2$ and $\iint_{A_1 A_2} f(a_1, a_2) d\beta_2 d\beta_1$ exist and are equal, is then demonstrated. *Hilbrandt.*

Fujiwara, Matsusaburô: On the integration and differentiation of an arbitrary order. Tôhoku Math. J. **37**, 110—121 (1933).

It is shown that the integral $I^\alpha f = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt / \Gamma(\alpha)$ is characterized by the properties: (a) $\int_0^x I^\alpha f = I^\alpha \int_0^x f$; (b) $d/dx I^\alpha f = I^{\alpha-1} f$ for $\alpha > 1$; (c) $I^\beta (I^\alpha f) = I^{\alpha+\beta} f$, for $\alpha, \beta > 0$, provided it be assumed that $I^\alpha f = \int_0^x \varphi(x, t, \alpha) f(t) dt$ and $\varphi(x, t, \alpha) / (x-t)^{\alpha-1}$ is analytic in x and t . By using this result the integral

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (\Gamma(s) x^s)^k ds$$

is shown to satisfy the differential equation $(x d/dx)^k f = (k/x)^k f$ and if $f(x)$ allows an asymptotic expansion then $f(x) \sim C x^\lambda e^{-k/x}$ with $C = (2\pi)^k / \sqrt{k}$, and $\lambda = (k-1)/2$.

Hilbrandt (Ann Arbor).

Wilton, J. R.: A note on Stirling's theorem. Math. Notes Nr 28, XII—XIII (1933).

Es wird gezeigt, wie nur aus der Integraldarstellung der Γ -Funktion und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ die Stirlingsche Formel, sogar in der schärferen Form: $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \Phi(x)$ mit $1 < \Phi(x) < 1 + 11/(72x)$, zu erhalten ist, und angedeutet, daß sogar die asymptotische Entwicklung von $\Phi(x)$ in analoger Weise leicht zu erhalten wäre.

Karamata (Beograd).

Achyeser, N.: Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. II. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 3, 309—344 (1933).

Es sei E die aus zwei Intervallen $(-1; a)$ und $(b; +1)$ bestehende Menge, wobei $a < b$ vorausgesetzt ist. Es sei weiter $P_n(x)$ dasjenige Polynom mit dem höchsten Gliede x^n , welche auf E am wenigsten von Null abweicht. Die Aufgabe des Verf. besteht in der Bestimmung des asymptotischen Verhaltens des Maximums m_n von $P_n(x)$ auf E . Diese Aufgabe ist vom Verf. vollständig gelöst. Es ergibt sich dabei, daß $m_n \sim K \tau^n$ ist, wobei τ den transfiniten Durchmesser der Menge E bezeichnet und K zwar von den arithmetischen Eigenschaften der Zahlen a, b und n abhängig, aber beschränkt ist. In dem einfachsten symmetrischen Falle $a = -b$ erhält man insbesondere

$$m_{2n} = 2\tau^{2n}, \quad m_{2n-1} \sim 2 \sqrt{\frac{1+b}{1-b}} \tau^{2n-1}.$$

Im letzten Kapitel betrachtet Verf. dieselbe Aufgabe bei der Einführung einer beliebigen polynomialen Belegung.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Achyeser, N.: Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. III. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 4, 499—535 (1933).

Les trois derniers chapitres de ce travail [voir Bull. Acad. Sci. URSS 1932, Nr 9 et 1933, Nr 3; ce Zbl. 7, 8 et le ref. préc.] contiennent: 1° une étude asymptotique, pour $n \rightarrow \infty$, de l'écart $m_n[s(x)]$ du polynôme de Tchébycheff relatif au système de deux intervalles $(-1, \alpha)$ et $(\beta, 1)$ et au poids $s(x)$ quelconque, 2° généralisations des résultats de M. S. Bernstein concernant la meilleure approximation polynomiale des fonctions de la forme $f(x) = \frac{\lg^m(a-x)}{(a-x)^3}$ dans le cas de deux intervalles (on considère les hypothèses $\alpha < a < \beta$ et $|a| > 1$), 3° une étude détaillée de l'allure des polynômes de Tchébycheff en question: deux espèces de polynômes sont distinguées suivant qu'il existe un ou deux extréma dans l'intervalle (α, β) , sans parler du cas où il n'en existe pas du tout. Les fonctions elliptiques interviennent toujours.

W. Gontcharoff (Moscou).

Lehmer, D. N.: On ternary continued fractions. Tôhoku Math. J. 37, 436—445 (1933).

The author gives a brief summary of the results he and some of his pupils (Coleman, Daus) have obtained in their investigations, dealing, from the numbertheoretical point of view, with the ternary (and higher) continued fraction given by (Jacobi)

$$U_n = q_n U_{n-1} + p_n U_{n-2} + U_{n-3} \quad (U_n = A_n, B_n, C_n) \quad (1)$$

with initial values 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 for A_n, B_n, C_n resp. The sets $\{A_n, B_n, C_n\}$ and $\{p_n, q_n\}$ are called resp. the convergent sets and partial quotient sets of a ternary continued fraction. The results here summarized are compared with those known for the ordinary ("binary") continued fractions $a_1 + \frac{b_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_3} + \dots$. 1° (1) yields a solution of the indeterminate equation $A_n X + B_n Y + C_n Z = 1$. 2° The purely periodic continued fraction

$$(\overline{p_1, q_1; p_2, q_2; \dots; p_k, q_k}) \quad (2)$$

is associated with the characteristic cubic

$$\begin{vmatrix} A_{k-2} - \varrho & B_{k-2} & C_{k-2} \\ A_{k-1} & B_{k-1} - \varrho & C_{k-1} \\ A_k & B_k & C_k - \varrho \end{vmatrix} \equiv -\varrho^3 + M\varrho^2 - N\varrho + 1 = 0, \quad (3)$$

which remains unaltered by any cyclic permutation of the partial quotient pairs. (3) yields the recurrence formulae

$$U_n = MU_{n-k} - NU_{n-2k} + U_{n-3k} \quad (U_i = A_i, B_i, C_i) \quad (4)$$

from which $\lim \frac{U_{n+k}}{U_n}, \lim \frac{B_n}{A_n}, \lim \frac{C_n}{A_n} (n \rightarrow \infty)$ are obtained, expressed in a simple manner in terms of the roots of (3) (subject to proper restrictions). 3° The ternary fraction representing the simple cubic irrationality $R^{1/3}$ is discussed, compared with the "binary" continued fraction for $R^{1/2}$. The author further discusses: 4° proper continued fractions, i. e. where $p_n \leq q_n$, and the equivalent improper ones; 5° the effect on the irrationality involved of the inversion of the order of the partial quotients in (2); 6° the relation between the continued fraction $\{A_n, B_n, C_n\}$ and its reciprocal $\{A'_n, B'_n, C'_n\}$, i. e. where $A'_n = B_{n-2}C_{n-1} - C_{n-2}B_{n-1}$, etc. *Shohat.*

Paley †, R. E. A. C.: Note on a theorem of Kolmogoroff and Menchoff. Math. Z. 37, 669—673 (1933).

An alternative proof of the following theorem of Menchoff and Kolmogoroff [Math. Z. 26, 432—441 (1927)] is given: There exists an orthogonal system of functions

$\varphi_n(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) assuming only the values ± 1 and a sequence of real constants a_n , $\sum a_n^2 < \infty$, such that $\sum a_n \varphi_n(x)$ diverges everywhere. The new proof is simpler, although less elementary (in particular it uses some theorems on characters) than the original proof.

A. Zygmund (Wilno).

Biggeri, Carlos: Mehrfache Dirichletsche Reihen und Integrale. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **29**, 311–326 (1933) [Spanisch].

Biggeri, Carlos: Über Dirichletsche Doppelreihen und Doppelintegrale. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **30**, 9–51 (1933) [Spanisch].

Verf. definiert als Dirichletsches Doppelintegral

$$f(z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r, s) e^{-\lambda(r)z - \mu(s)w} dr ds,$$

wobei $\varphi(r, s)$ eine komplexe oder reellwertige Funktion der reellen Veränderlichen r, s ist, die zudem integrabel auf jedem Rechteck $(0, 0) (r, 0) (r, s) (0, s)$ angenommen wird; $\lambda(r)$ und $\mu(s)$ sind reell, positiv, wachsend, differenzierbar und streben für $r, s \rightarrow \infty$ nach ∞ ; $z = x + iy$, $w = u + iv$ sind unabhängige komplexe Veränderliche. Mit

$\Phi(r, s)$ sei das Integral $\int_0^r \int_0^s$, also der „Abschnitt“, an einer gewissen speziellen Stelle

z_0, w_0 , mit $g(r, s, z, w)$ der Abschnitt an einer allgemeinen Stelle bezeichnet. Ähnliche Definitionen und Sätze gelten für Dirichletsche Doppelreihen sowie mehrfache Integrale und Reihen; wir sprechen immer nur von Doppelintegralen. — In der ersten Arbeit werden einige allgemeine Sätze gegeben, namentlich in bezug auf das Konvergenzverhalten: Ist der Abschnitt $\Phi(r, s)$ bei z_0, w_0 beschränkt oder doch $= O(e^{\xi \lambda(r) + \eta \mu(s)})$ für ein $\xi > 0$, so konvergiert das Integral gleichmäßig in einem Doppelwinkelraum (der z - und w -Ebenen) mit Spitze in (z_0, w_0) , von dem eine Nachbarschaft der Spitze fortgenommen ist. Unter Einschränkungen bei obiger Abschätzung ergibt sich ein besserer Bereich gleichmäßiger Konvergenz. Ein dritter Satz folgert aus Beschränktheit von Integral und Abschnitt an einer speziellen Stelle z_0, w_0 die Beziehung $g(r, s; z, w) : yv \rightarrow 0$ für $(y, v) \rightarrow (\infty, \infty)$, also eine Aussage über das Wachstum des Abschnitts für beliebiges z, w in bezug auf die Imaginärteile der Veränderlichen. — In der 2. Arbeit wird zunächst unter Spezialisierung $\lambda(r) = r, \mu(s) = s$ dem Wachstum von $f(z, w)$ näheres Studium gewidmet und die Wachstumsordnung sowohl auf den Geraden $x = \alpha, u = \beta$ als auch auf den Halbebenen $x \geq \alpha, u \geq \beta$ erklärt. Unter Rückkehr zum allgemeinen Fall folgen dann Formeln zum Umkehrproblem, wo es sich darum handelt, bei gegebenem $f(z, w), \lambda(r), \mu(s)$ die erzeugende Funktion $\varphi(r, s)$ zu ermitteln. Weiter werden einige besondere Konvergenzfälle untersucht, die neben

Annahmen wie $|\arg \varphi(r, s)| \leq \tau < \frac{2}{\pi}$ (speziell $\tau = 0$: $\varphi =$ positiv reell) noch die Voraussetzung enthalten, $f(z, w)$ sei für reelle z, w als regulär analytisch bekannt: dann konvergiert das Integral für jedes beliebige z, w . Schließlich werden noch einige naheliegende Einschränkungen für die Lage von Nullstellen erwähnt. Eine Fortsetzung in verschiedenen Richtungen wird angekündigt. *Ulrich* (Marburg, Lahn).

● **Favard, J.: Leçons sur les fonctions presque-périodiques.** Préface de Gaston Julia. (Cahiers scient. Fasc. 13.) Paris: Gauthier-Villars 1933. VIII, 183 S. Frs. 50.—

Außer der ursprünglichen Bohrschen Theorie, die in der durch die Arbeiten von Bochner, Weyl, de la Vallée-Poussin ermöglichten sehr einfachen Form dargestellt ist, enthält das Buch noch die schönen Untersuchungen über Differentialgleichungen mit fastperiodischen Koeffizienten sowie über harmonische fastperiodische Funktionen, welche zum größten Teil vom Verf. herrühren. Diese auf die Anwendungen der Theorie gerichteten Untersuchungen wurden in den bisher erschienenen Büchern von Besicovitch und Bohr nicht behandelt. Unter den Verallgemeinerungen der Theorie sind die Stepanoffschen Funktionen ausführlich behandelt; man findet auch das Besicovitchsche Analogon des Riesz-Fischerschen Satzes. *Jessen*.

Reihen :

Szegő, G.: Über gewisse Potenzreihen mit lauter positiven Koeffizienten. *Math. Z.* **37**, 674—688 (1933).

Es wird die Vermutung von K. Friedrichs und H. Lewy bewiesen, daß die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{1}{(1-\beta)(1-\gamma) + (1-\gamma)(1-\alpha) + (1-\alpha)(1-\beta)}$$

sämtlich positiv sind. Aus einer Formel von Weber folgt für $t > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\omega_1(1-\alpha) - \omega_2(1-\beta) - \omega_3(1-\gamma)} J_0(2\sqrt{\omega_1 t}) J_0(2\sqrt{\omega_2 t}) J_0(2\sqrt{\omega_3 t}) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = \\ = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} e^{-t\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}\right)}. \end{aligned}$$

Daß die fraglichen Koeffizienten nichtnegativ sind, ergibt sich hieraus leicht, wenn man die Gleichung über alle positiven t -Werte integriert und die Integrationsreihenfolge unter Beachtung einer Formel von Sonine vertauscht. Die Behauptung der Positivität erfordert eine etwas genauere Abschätzung. Der Satz wird mit ähnlichen

Methoden noch verallgemeinert: Es sei $f(x) = \prod_1^n (x - \alpha_\nu)$; dann sind die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $1/\{f'(1)\}^{\nu+1}$ für $\nu \geq -1/2$ nichtnegativ, und für $\nu > -1/2$, $n > 4(\nu+1)/2\nu+1$ sogar positiv. — In einem (von der eigentlichen Arbeit unabhängigen) Anhang wird das sog. Gibbsche Phänomen bei Integralen vom Sonine-schen Typus festgestellt.

Willy Feller (Kopenhagen).

Kaluza, Th.: Elementarer Beweis einer Vermutung von K. Friedrichs und H. Lewy. *Math. Z.* **37**, 689—697 (1933).

Die im vorstehenden Referat erwähnte Vermutung wird in eleganter Weise elementar bewiesen; dabei ergibt sich für die fraglichen Koeffizienten eine explizite positive Darstellung sowie eine asymptotische Abschätzung. Es werden gewisse Polynome angegeben, die die Rolle von erzeugenden Funktionen spielen: unter ihren Koeffizienten kommen auch alle zu untersuchenden Potenzreihenkoeffizienten vor (wie sich aus einer Rekursionsformel ergibt). Der Satz wird nun dahin verallgemeinert, daß sogar alle Koeffizienten dieser Polynome wesentlich positiv sind. Dieser allgemeinere Satz wird durch Zurückführung auf einfachere Polynome bewiesen. Bei den hierzu vorgenommenen Umformungen ergeben sich einige merkwürdige Relationen, insbesondere für die Binomialkoeffizienten.

Willy Feller (Kopenhagen).

Motzkin, Theodor: Bemerkung über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteter Potenzreihen. *Math. Ann.* **109**, 95—100 (1933).

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$. D'après un th. de Mandelbrojt si $a_{nq+k} = 0$ (q, k fixes, $n = 1, 2, \dots$), chaque fois que la fonction $f(z)$ admet sur le cercle de convergence une

singularité α , elle en admet une autre de la forme $\alpha e^{\frac{i2\pi p}{q}}$ (p entier). [Ann. École norm. **40** (1923).] M. Ostrowski a généralisé ce théorème en démontrant que si q est premier et si $a_{nq+k_i} = 0$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_r < q$), alors tous les points $\alpha \varepsilon_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$), où les ε_i sont différentes racines q -ièmes de l'unité, sont singuliers pour $f(z)$. [Jber. Deutsch. Math.-Verein. **35** (1926).] M. Motzkin donne une généralisation du th. de M. Ostrowski au cas où q n'est plus premier et où $r = 2$ ou 3 . Mandelbrojt.

Motzkin, Th.: Notiz zu einem Kriterium für die Konvergenz von Reihen mit reellen Gliedern. *Comment. math. helv.* **6**, 129—132 (1933).

Es sei $a_n > 0$ und $\sum_{\nu=1}^n (a_\nu - a_n)$ nach oben beschränkt. Zur Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ notwendig und hinreichend. Szegő (Königsberg, Pr.).

Bernstein, Serge: Remarque à propos d'une note de M. R. Salem. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 213—214 (1933).

Answering a problem propounded by Salem [Is it possible to find an absolute constant C such that, given any finite system of non-negative numbers r_1, r_2, \dots, r_n , there exist real numbers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ satisfying the inequality

$$\left| \sum_{p=1}^n r_p e^{i(p\pi + \alpha_p)} \right| \leq C \sqrt{\sum_{p=1}^n r_p^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi?$$

See C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1776 (1933).] Bernstein constructs the same "Gegenbeispiel" as was mentioned by the referee, this. Zbl. 7, 112. A. Zygmund (Wilno).

Bosanquet, L. S., and M. L. Cartwright: Some Tauberian theorems. Math. Z. 37, 416—423 (1933).

Two typical results of this paper are as follows. I. If $\sum_0^\infty a_n$ is bounded ($C \cdot \alpha$), $\alpha \geq -1$, and $f_\lambda(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, $0 \leq |\gamma| < \pi/2$ for some positive integer λ , then $\sum a_n$ is summable ($C \cdot \alpha + \delta$) for every $\delta > 0$. Here

$$f(z) \equiv f_0(z) = \sum a_n z^n, \quad f_\lambda(z) \equiv (1-z)^{-1} \int_z^1 f_{\lambda-1}(u) du.$$

II. If a_n is real, $f(z) = O[\exp\{|1-|z||^{-\pi/2\alpha}\}]$, $0 < \alpha < \pi/2$, as $z \rightarrow 1$ in $|z| < 1$, and $f(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, where $0 \leq |\gamma| < \alpha$, then $f(z) \rightarrow A$ when $z \rightarrow 1$ so that $|\arg(1-z)| \leq \gamma$. Other results are obtained by introducing modified "one-sided" conditions upon a_n , and by requiring different asymptotic behaviour of $f(z)$ as $z \rightarrow 1$. J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Moore, Charles N.: On criteria for Fourier constants of L integrable functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 846—848 (1933).

The following theorem is established. A series $\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots$ converges for $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ and is the Fourier-Lebesgue series of its sum, provided that $1^\circ a_n \rightarrow 0$, $2^\circ \sum_{n=1}^\infty n^k |\Delta^{k+1} a_n| < \infty$, for a $k > 0$, not necessarily integral ($\Delta^l a_n$ is defined as the sum of the series $a_n - l a_{n+1} + \frac{l(l-1)}{2} a_{n+2} - \dots$). A. Zygmund.

Mulholland, H. P.: Concerning the generalization of the Young-Hausdorff theorem and the Hardy-Littlewood theorems on Fourier constants. Proc. London Math. Soc., II. s. 35, 257—293 (1933).

Die Arbeit hat die Verallgemeinerung der Ungleichungen von Young-Hausdorff und gewisser Ungleichungen von Hardy-Littlewood (Math. Ann. 97, 159—209; Math. Z. 16, 163—169; 25, 321—347) über Fouriersche Koeffizienten zum Gegenstande; ähnliche Verallgemeinerungen entsprechender Sätze über Potenzreihenkoeffizienten gab Mulholland in einer früheren Note [Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 481—516 (1932); dies. Zbl. 4, 251]. Die Verallgemeinerungen gehen in der Richtung, daß die in den genannten Ungleichungen auftretenden Potenzen durch allgemeinere Funktionen ersetzt werden. Als ein Ergebnis, daß durch Spezialisierung erhalten wird, sei herausgehoben: Für $p > 2$ und jedes reelle α folgt aus der Konvergenz von

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [c_n | \{1 + \lg(1/|c_n|)\}^\alpha]^p \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

die Existenz einer Funktion $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ derart, daß das Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [|f(x)| \{1 + \lg |f(x)|\}^\alpha]^p dx$$

konvergiert.

R. Schmidt (Kiel).

Verblunsky, S.: On the theory of trigonometric series. (IV.) Proc. London Math. Soc., II. s. 35, 445—487 (1933).

This paper contains a large number of results concerning the existence of perfect sets of unicity associated with summable trigonometric series

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (*)$$

whose coefficients satisfy the condition (**) $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ when $n \rightarrow \infty$ not through all integer values but only through those belonging to some specified sequences S . A fundamental notion used in the paper is that of a set of type H with respect to an increasing sequence of numbers $\{\mu_p \uparrow \infty\}$, not necessarily integers. Let σ be a closed set in $(0, 2\pi)$. Let σ_p be the set represented by $E(\mu_p x)$ when $x \in \sigma$, where $E(x) = x - 2\pi[x/2\pi]$.

The set σ is called to be of type H with respect to the sequence $\{\mu_p\}$ if $\sum_1^{\infty} \sigma_p$ is not everywhere dense in $(0, 2\pi)$. The following theorem gives an idea of the general character of results contained in the paper. Let $(*)$ be a differentiated Denjoy-Fourier series [so that $a_n, b_n = o(n^2)$]. Let σ be a closed set of type H with respect to a sequence $\{n_p \uparrow \infty\}$ of integers. Let S be any sequence of integers constructed as follows: take a fixed number $\delta > 0$ and form all aggregates of numbers $T_p = \{n_p, 2n_p, \dots, [n_p \delta] n_p\}$, $p = 1, 2, \dots$; let $T = \sum_1^{\infty} T_p$. Then S may be any sequence which is such that, being given any positive integer m , there must be an $n(m)$ such that $n \pm m$ belongs to S whenever $n \geq n(m)$ belongs to T . If $(*)$ is Poisson summable to zero in the set complementary to σ and if (**) is satisfied when $n \uparrow \infty$ in S , then all a_n and b_n vanish. The paper is closely related to the preceding paper III of the series [Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 526—560 (1932); see this Zbl. 6, 256]. An important tool used by the author is the investigation of relations of the type

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{in_p x} d(f) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} t(n_p x) df = (2\pi)^{-1} [f(2\pi) - f(0)] \int_0^{2\pi} t(x) dx,$$

where $t(x)$ is a trigonometric series suitably restricted, and $\int_a^b g df$ is a generalized Stieltjes integral defined by $f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$, where f is finite almost everywhere and integrable, while g has a bounded derivative. A considerable number of auxiliary notions and lemmas make it impossible to go into further details here.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Vignaux, J. C.: Sur une généralisation de la sommation des séries divergentes de **M. Le-Roy**. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 29—30 (1933).

A la série $\sum u_n$ l'auteur fait correspondre, comme somme, la quantité

$$s = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_0^{\infty} \left(\frac{\Gamma(nt+1)}{n!} \right)^{\delta} u_n. \quad (\delta > 0)$$

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Winn, C. E.: On strong summability for any positive order. Math. Z. 37, 481—492 (1933).

Une série $\sum u_n$ est dite fortement sommable (C, δ) avec la somme s , bref sommable $[C, \delta]$ si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |s_k^{(\delta-1)} - s| \right\} = 0$$

$s_k^{(\gamma)}$ désignant les moyennes arithmétiques d'ordre γ des sommes partielles

$$s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k.$$

De même, $\sum u_n$ oscille $[C, \delta]$ si l'on n'a que

$$\sum_{k=0}^n |s_n^{(\delta-1)}| = O(n).$$

L'auteur prouve différentes propositions relatives à la sommabilité $[C, \delta]$ ainsi qu'aux séries oscillant $[C, \delta]$. Notons les suivantes: $[C, \delta]$ entraîne (C, δ) , mais l'inverse n'a pas lieu en général. Néanmoins (C, δ) entraîne nécessairement $[C, \delta + 1]$ et cela avec la même somme. $[C, \kappa]$ entraîne $[C, \kappa + \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$; la sommabilité $[C, \kappa]$ jointe à la condition $nu_n = O(1)$ assure celle $[C, \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$. La série-produit des deux séries sommables $[C, \alpha]$ et $[C, \beta]$ l'est aussi $[C, \alpha + \beta]$. Si l'une des deux séries-facteurs n'est sommable que simplement, (C, β) au lieu de $[C, \beta]$ p. ex., la série-produit est sommable $(C, \alpha + \beta)$. — La sommabilité absolue d'ordre 1, $|C, 1|$, entraîne comme l'a prouvé M. Fekete, celle $[C, 1]$. L'auteur observe, sans preuves à l'appui, que $|C, \delta|$ entraîne $[C, \delta]$ quelque soit l'ordre δ et il suffit d'employer le théorème de Fekete $[C, 1] \succ |C, 1|$ joint au résultat dû à Kogbetliantz et d'après lequel

$$|C, \delta| \infty |C, \delta - 1| \cdot |C, 1| \infty |C, \delta|$$

pour donner la preuve du fait en question $[C, \delta] \succ |C, \delta|$. Il serait très intéressant de montrer sur un exemple que $[C, \delta]$ n'entraîne point $|C, \delta|$. E. Kogbetliantz.

Differentialgleichungen:

Minetti, Silvio: Sur la géométrie de l'holoespace des fonctions holomorphes dans un même domaine et sur ses liens avec la théorie des équations différentielles ordinaires. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 637—639 (1933).

Der Verf. sucht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jedes Integral der nichtlinearen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ zugleich ein Integral einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Er bekommt sie mit Hilfe des Pascal-Vitalischen absoluten Differentialkalküls des Funktionenraumes. *Hlavatý.*

Jonesco, D. V.: Généralisation d'une équation de M. E. Goursat. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 666—668 (1933).

Verf. kündigt folgenden Satz an: Die lineare Integrodifferentialgleichung

$$x^n z^{(n)} + x^{n-1} p_1(x) z^{(n-1)} + \dots + x p_{n-1}(x) z' + p_n(x) z = f(x) + \int_0^x N(x, s) z(s) ds \quad (1)$$

($p_i(x)$, $f(x)$, $N(x, s)$ holomorph für $|x| \leq R$, $|s| \leq R$) besitzt ein für $x = 0$ holomorphes Integral, wenn die char. Gl.

$$\varphi(r) = r(r-1) \dots (r-n+1) + p_1(0) \cdot r \cdot (r-1) \dots (r-n+2) + \dots + p_n(0) = 0 \quad (2)$$

keine pos. ganzzahlige Wurzel besitzt. — Daraus folgt u. a. als Verallgemeinerung eines Satzes von Goursat: Die Gleichung

$$x^n z^{(n+m)} + x^{n-1} p_1(x) z^{(n+m-1)} + \dots + x p_{n-1}(x) z^{(m+1)} + p_n(x) z^{(m)} + \dots + p_{n+m}(x) z = \int_0^x N(x, s) z(s) ds$$

besitzt m linear unabhängige, für $x = 0$ holomorphe Integrale, falls die char. Gl. (2) dieselbe Bedingung wie oben erfüllt. — Für die homogene Gl. (1) ($f(x) = 0$) gelten analoge Sätze wie für lineare Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus.

Kähler (Königsberg Pr.).

Bochner, S.: Homogeneous systems of differential equations with almost periodic coefficients. J. London Math. Soc. 8, 283—288 (1933).

Il s'agit des systèmes de la forme

$$\frac{dy_\mu(x)}{dx} = \sum_{\nu=1}^m a_{\mu\nu}(x) y_\nu(x) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

où les $a_{\mu\nu}$ sont des fonctions p. p. réelles. Une solution réelle, non identiquement nulle, du système: $\{y_\nu(x)\} = \eta(x) (\nu = 1, 2, \dots, m)$, est dite p. p. s'il en est ainsi pour chacune des fonctions y_ν . Dans l'espace d'ordre m l'auteur considère la fermeture $R(\eta)$ de l'ensemble des points $\eta(x)$ et obtient le résultat suivant: Soit $\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_m(x)$ un ensemble de m solutions linéairement indépendantes du système donné, toutes les solutions du système sont p. p. si: 1° tous les $R(\eta_\mu)$ sont bornés; 2° s'il n'y a pas de solution $\eta(x)$ du système telle que $R(\eta)$ soit un sous ensemble de l'un des $R(\eta_\mu)$, 3° si le Wronskien $\|\eta_\mu(x)\|$ reste en module supérieur à un nombre fixe. — Le module des solutions est alors égal au module des équations (c.-a.-d. le plus petit module de nombres contenant les exposants des $a_{\mu\nu}$).

J. Favard (Grenoble).

Tricomi, F.: A proposito della mia nota: *Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in „Elettrotecnica“*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 26 bis 28 (1933).

Verf. vervollständigt einige Beweise und erklärt den Sinn einiger Behauptungen seiner im Titel erwähnten Note, die dem Ref. (dies. Zbl. 6, 55) nicht zuverlässig schienen. Es ergibt sich folgendes: die fragliche Gleichung, die eine leichte Transformation in

$$2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha \frac{dy}{dx} + \sin y + \beta = 0 \quad (\alpha, \beta \text{ Konstanten})$$

überführt, läßt eine einzige Lösung $y(x)$ zu, die monoton ist und periodische Ableitung $y'(x)$ hat, sobald entweder $\beta > 1$, oder α eine gewisse Grenze α_0 nicht übertrifft; ist dagegen $\beta < 1$, $\alpha > \alpha_0$, so existiert keine derartige Lösung $y(x)$. Jedem $\beta < 1$ entspricht ein einziger Wert der Grenze α_0 , für den vom Verf. eine obere und eine untere Abschätzung angegeben wurden. Bemerkenswerte Abschätzungen wurden auch für die Periode der Ableitung $y'(x)$ gefunden. Die Konvergenz gegen die gesuchte Lösung einer vom Verf. weiter angegebenen Methode von sukzessiven Annäherungen ist nur als „approximiert“ anzunehmen. Nichtsdestoweniger ist die Methode zum „numerisch-praktischen“ Zweck sehr gut geeignet, wie Verf. sagt, der außerdem die Idee eines Integrals für die mechanische Integration der Gleichung ankündigt. *Cimmino*.

Gebelein, Hans: Zur praktischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels schrittweiser Annäherung. Z. angew. Math. Mech. 13, 385–386 (1933).

Die Arbeit skizziert den (trivialen) Beweis für die nicht durchaus neue Idee, eine Differentialgleichung $dx/dt = f(x, t)$ in der Weise durch sukzessive Approximation zu lösen, daß man bei jedem Schritt nicht eine reine Quadratur ausführt, sondern eine lineare Differentialgleichung löst. Es werden Beispiele angegeben, wo eine derartige Auflösung dem physikalischen Problem angemessen ist. *Rudolf Iglisch* (Aachen).

Gehlen, Walther: Wirkungsstärke intravenös verabreichter Arzneimittel als Zeitfunktion. Ein Beitrag zur mathematischen Behandlung pharmakologischer Probleme. Naunyn-Schmiedeberg's Arch. 171, 541–554 (1933).

Es handelt sich um die quantitative Behandlung der Wirkung von Konzentrationsgiften, die dem Organismus intravenös zugeführt werden. Verf. gewinnt aus theoretischen Überlegungen folgende Ansätze: Sei $w = f(t)$ die vom Erfolgsorgan zur Zeit t gebundene Giftmenge, $x = g(t)$ die zur Zeit t im Blut vorhandene Giftmenge. Dann gilt 1. für einmalige Giftzufuhr A) ohne gleichzeitige Entgiftung: $x' = \frac{dx}{dt} = -k(x - \lambda w)$, $w' = k(x - \lambda w)$, wo k bzw. λ Diffusions- bzw. Verteilungskonstante; B) mit Entgiftung: $x' = -k(x - \lambda w) - k'x$, $w' = k(x - \lambda w) - k'w$, wo k' bzw. k'' Ausscheidungskonstante für Blut bzw. für Erfolgsorgan. 2. Für dauernde Giftzufuhr mit Entgiftung: $x' = v - k(x - \lambda w) - k_2 x$, $w' = k(x - \lambda w) - k_2 w$, wo v (konstant) Infusionsgeschwindigkeit, $k_2 = k' = k''$ (vgl. 1, B). — Im Falle 1, A bzw. 1, B für $k' = k''$ ist demgemäß w von der Form $\varphi = A(1 - \exp(-k_1 t))$, $k_1 = k(1 + \lambda)$ bzw. $\psi = \varphi \cdot \exp(-k_2 t)$; im Falle 2 von der Form $B(1 + C \cdot \exp(-k_2 t) + D \psi)$. Aus dieser Form der Lösung ergibt sich: Erstens das bereits empirisch bekannte Gesetz, demzufolge die optimale Infusionszeit nur von dem betr. Gift abhängt (bei gleichem Erfolgsorgan); zweitens das bisher noch nicht formulierte Gesetz, demzufolge der Zeitpunkt, zu welchem im Erfolgsorgan die maximale Giftmenge vorhanden ist, unabhängig von der Gabengröße, also nur abhängig von Gift und Erfolgsorgan ist. — Die weitgehende Übereinstimmung dieser rein theoretisch gefundenen Ergebnisse mit den Beobachtungen erscheint sehr bemerkenswert.

Haupt (Erlangen).

Bouligand, Georges: Sur quelques cas singuliers du problème de Dirichlet. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 301—317 (1933).

Die Koeffizienten der Gleichung

$$P \cdot \Delta u + Q \cdot u_x + R \cdot u_y + Su = 0$$

seien Polynome. Für $x > 0$ sei $S \leq 0$, $P > 0$; ferner sei $P(0, y) = 0$. Es wird die erste Randwertaufgabe betrachtet für ein Gebiet, dessen Begrenzung aus einem Intervall der y -Achse und zwei einfachen Kurvenbögen besteht, die dessen Endpunkte im Inneren der Halbebene $x > 0$ verbinden. Wegen $P(0, y) = 0$ muß das Problem keine Lösung haben. Es wird bewiesen, daß unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über die Koeffizienten eine Lösung im bekannten verallgemeinerten Sinne existiert (man setzt die Randwerte in das Innere fort, löst die Randwertaufgabe für eine passende Folge von Gebieten, die von innen her das gegebene approximieren und betrachtet die Grenzfunktion der Lösungen). — Weiter wird gezeigt, wie man durch das Vergleichen von Lösungen zuweilen deren Verhalten am Rande feststellen kann. *W. Feller*.

Capoulade, Jean: Sur le problème de Dirichlet pour certaines équations aux dérivées partielles du type elliptique à coefficients singuliers. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 68 bis 70 (1933).

Reduktion der einschränkenden Voraussetzungen über die Koeffizienten, von denen im vorangehenden Referat die Rede war. *Willy Feller* (Kopenhagen).

Bertolini, C.: Studio di una equazione alle derivate parziali del terzo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 97—102 (1933).

Kurzer Bericht über die Anwendung eines Fubinischen Gedankenganges auf die partielle Differentialgleichung 3. Ordnung

$$f_{xyz} + a f_{xy} + b f_{yz} + c f_{zx} + \alpha f_x + \beta f_y + \gamma f_z + \delta f = \varphi$$

(a, b, \dots stetige Funktionen von x, y, z) mit den Anfangsbedingungen

$$f(0, y, z) = f(x, 0, z) = f(x, y, 0) = 0.$$

Man bildet eine Differenzengleichung, die durch Grenzübergang in die Differentialgleichung übergeht. Wenn man aber zunächst die Differenzengleichung (mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen) in passender Weise umformt, so wird sie von dem Grenzübergang in eine Volterra'sche Integralgleichung übergeführt. Man kann nachträglich bestätigen, daß diese Integralgleichung und die ursprüngliche Gleichung (mit Anfangsbedingungen) äquivalent sind.

G. Cimmino (Napoli).

Hadamard, M.: Propriétés d'une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre. Tôhoku Math. J. 37, 133—150 (1933).

Die Gleichung $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$ ist weder (total) elliptisch noch (total) hyperbolisch. Durch welche Daten können ihre Lösungen eindeutig bestimmt werden, derart, daß stetige Änderung der Daten eine stetige Änderung der Lösung hervorruft, und ohne daß die Daten als analytisch vorausgesetzt werden? Eine Antwort ist diese: auf zwei anliegenden Seiten eines Rechtecks, dessen Seiten die Form $x + y = \text{konst.}$ und $x - y = \text{konst.}$ haben, gebe man u ; auf allen Seiten die Normalableitung von u ; so daß gewisse Ableitungen, die sich in den Ecken auf verschiedene Weise berechnen lassen, einen wohlbestimmten Wert zeigen. — Für den Fall des Einheitskreises ist die Lage komplizierter und wird auf ein gewisses Randwertproblem für Potentialfunktionen zurückgeführt. — Schließlich führt der Fall einer geschlossenen dreiteiligen Kurve, von der zwei Teile charakteristische Geraden sind, auf eine gewisse singuläre Integralgleichung. — Die Vorgabe von u und Δu an Stelle von u und Normalableitung gestattet eine einfache Festlegung der Lösung, wie im letzten Abschnitt bemerkt wird.

Hans Levy (Providence).

Howland, R. C. J., and A. C. Stevenson: Bi-harmonic analysis in a perforated strip. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 232, 155—222 (1933).

Im Anschluß an zwei frühere Veröffentlichungen [R. C. J. Howland, Proc. Roy.

Soc. London A **124**, 89 (1929); Philos. Trans. Roy. Soc. London A **229**, 49 (1930)] hatte R. C. J. Howland auf dem Stockholmer Internationalen Kongreß für Technische Mechanik [Verhandl. 2, 74 (1931); vgl. dies. Zbl. 2, 66 (1931)] einen vorläufigen Bericht über weitere Untersuchungen erstattet, die sich auf die Theorie der Spannungen in einem unbegrenzt langen Streifen mit parallelen Rändern und mit einem kreisrunden Loch in der Mitte beziehen. Die vorliegende umfangreiche Abhandlung enthält jetzt eine ausführliche Wiedergabe aller mathematischen Details der Lösung des zugehörigen Randwertproblems der biharmonischen Differentialgleichung; die dabei vorkommenden Funktionen werden diskutiert und tabuliert, desgleichen die numerischen Werte aller erforderlichen Koeffizienten in Tabellen zusammengestellt. Als Fundamentallösungen, mit deren Benutzung sich weitere Lösungen in beliebiger Anzahl aufbauen lassen, werden neben dem bereits früher behandelten Fall eines gleichförmigen Zuges im ungestörten Streifen diejenigen besonders berücksichtigt, die einerseits dem Fall eines reinen Biegemoments von festem Betrag, andererseits dem Fall einer festen Scherkraft nebst einem dem Abstand vom Ursprungsquerschnitt proportionalen Biegemoment im nichtdurchlochten Streifen zugeordnet sind. *Harry Schmidt* (Köthen).

Strutt, M. J. O.: Eigenschwingungen einer Kegelschale. Ann. Physik, V. F. **17**, 729—735 (1933).

Eine Kegelschale ist durch zwei Breitenkreise begrenzt. Der eine ist starr gelagert, der andere kräftefrei. Durch geometrische Betrachtungen werden die Differentialgleichungen für die dehnungslose Verformung der Schale gewonnen. Ihre Lösung wird benutzt, um nach der Methode von Rayleigh (Sc. Papers 1, 551) die Eigenschwingungen zu berechnen. Der Grenzfall des Zylinders wird diskutiert, während der Fall, daß der kräftefreie Rand zur Kegelspitze entartet, der Theorie nicht zugänglich ist, da eine Kegelschale, die sich von der Spitze bis zu einem gestützten Rand erstreckt, keine dehnungslosen Formänderungen haben kann. *Flügge* (Göttingen).

Bateman, H.: Logarithmic solutions of Bianchi's equation. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 852—854 (1933).

Vorgelegt sei die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^n V}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = V$. Setzt man $l_1 = \log x_1$, $l_2 = \log x_2$, ..., $l_n = \log x_n$ und $z = l_1 + l_2 + \dots + l_n$, so wird $V = F(z)$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, wenn $F(z)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{d^n F}{dz^n} = e^z F$ genügt. Es sei $F = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{z^s}{s!} U_s(z)$ die allgemeine

Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung, wobei $U_s(z)$ gewisse von Sibirani [Ann. Math. (3) **28**, 1—34 (1918)] eingeführte Funktionen bedeuten. Dann werden

Lösungen V von $\frac{\partial^n V}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = V$ in der Form $V = \sum_{s=0}^{n-1} H_s U_s(z)$ angegeben, wo H_s ein homogenes Polynom s -ten Grades in l_1, l_2, \dots, l_n bedeutet. *Rellick* (Göttingen).

Funktionentheorie:

Stein, P.: On a theorem of M. Riesz. J. London Math. Soc. **8**, 242—247 (1933).

Für das wichtige Theorem von M. Riesz [Math. Z. **27**, 218—244 (1928)]

$$M_p \{f\} \leq A(p) M_p \{\Re f\},$$

wobei $f(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion, M_p den Mittelwert p -ter Ordnung von f bzw. $\Re f$ auf dem Kreise $|z| = r$, $r < 1$, $p > 1$ und $A(p)$ eine nur von p abhängige Konstante bezeichnet, liefert der Verf. einen neuen, geistreichen Beweis, der auf dem klassischen Greenschen Theorem beruht. Seine Schlußweise ergibt

$$A(p) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}} & \text{für } 1 < p \leq 2, \\ 2^{-\frac{1}{p}} & \text{für } p \geq 2. \end{cases}$$

Die gleiche Methode kann nach einer Bemerkung von Littlewood zum Beweis der Zygmundschen Ungleichung [Fundam. Math. **13**, 284—303 (1929)]

$$M_1\{f\} \leq A \int_0^{2\pi} |u| \log^+ |u| d\theta, \quad u = \Re f,$$

benutzt werden.

Szegő (Königsberg i. Pr.).

Denjoy, Arnaud: Sur une extension de la formule de Jensen. *Mathematica* **7**, 129—135 (1933).

Es werden Funktionen F , Φ zugrunde gelegt, deren logarithmische Ableitungen auf einem abgeschlossenen Bereich mit Rand C regulär analytisch sind, mit Ausnahme von höchstens je endlich vielen inneren Bereichspunkten. Dann kann eine explizite Darstellung des Integrals (erstreckt über einen vollen Umlauf um C im positiven Sinne, von einer Stelle ξ angefangen)

$$J(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi C \xi} \log F(z) \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dt$$

aus dem Verhalten der Funktionen F und Φ bzw. ihrer logarithmischen Ableitungen an den singulären Stellen im Bereichinneren gewonnen werden; sie hängt außerdem noch vom Anfangspunkt ξ des Umlaufs ab, der ja i. A. auf einer Überlagerungsfläche zu verstehen sein wird, wo er sich nicht schließt. *Ulrich* (Marburg, Lahn).

König, Karl: Einige Koeffizientenprobleme aus der Funktionentheorie. *Tôhoku Math. J.* **37**, 374—379 (1933).

Nach Feststellung einiger bekannter Eigenschaften des Schwarzschen Differentialausdrucks beweist der Verf. mit Hilfe des Flächensatzes: Ist $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ in $|z| < 1$ schlicht, so ist, falls die Relation $\frac{a_3}{3} = \left(\frac{a_2}{2}\right)^2$ besteht, $|a_3| \leq 3$ und falls $a_2 = 0$ ist, $|a_3| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Die erste Schranke ist scharf, die zweite unscharf. Mit denselben Hilfsmitteln hätte er ebenso leicht zeigen können, daß im zweiten Fall $|a_3| \leq 1$ ist und dies die genaue Schranke ist. *K. Löwner* (Prag).

Kobori, Akira: Über die Schlichtheit der Potenzreihen mit beschränktem Realteil. *Tôhoku Math. J.* **37**, 368—373 (1933).

Der Verf. berechnet die bekannte Schlichtheitschranke einer im Einheitskreis beschränkten Funktion und bringt das Resultat auf verschiedene Formen. *Löwner*.

Braitzew, I. R.: Über die Singularitäten der durch eine Dirichletsche Reihe bestimmten analytischen Funktion. *Math. Ann.* **109**, 83—94 (1933).

Dans une série de travaux antérieurs (*Rec. math. Soc. math. Moscou* **26**, Ann. Inst. Polyt. Varsovie, 1908—1909, 1913, 1914—1915) l'auteur a développé une méthode pour la détermination des points singuliers des fonctions définies par des séries de Taylor. Récemment il a étendu cette méthode aux fonctions de la forme $\varphi(z) = \sum_0^\infty f(t) z^t dt$ (v. ce Zbl. **6**, 64). Le présent Mémoire a pour but l'extension de la même méthode aux fonctions définies par des séries de Dirichlet. — Le résultat principal (qui donne l'énoncé de la méthode) et la démonstration de ce résultat sont essentiellement semblables aux parties correspondantes du Mémoire que nous venons de citer (Zbl. **6**, 64); par suite nous n'entrerons pas ici dans des détails. Il faut dire toutefois que la rédaction du présent Mémoire a une forme beaucoup plus rigoureuse et plus succincte que celle du Mémoire précédent. — Dans un dernier paragraphe l'auteur indique brièvement quelques théorèmes généraux que l'on peut démontrer en appliquant les résultats exposés au début du Mémoire. Une partie de ces théorèmes généraux a été toutefois déjà démontrée (par d'autres voies) par Carlson, Landau, Ostrowski, Szász dans des Mémoires de 1921, 1922 et 1928, dont l'auteur n'a eu connaissance qu'après la rédaction du présent Mémoire. *Vlad. Bernstein* (Milano).

Wolibner, Witold: Sur les ensembles des valeurs des fonctions analytiques, partout déterminées, aux singularités punctiformes, qu'elles admettent sur leurs ensembles singuliers. C. R. Soc. Sci. Varsovie 25, 56—62 (1933).

Proof of the following two theorems: 1) An everywhere defined, bounded, one-valued, analytic function, with punctiform singularities — i. e., such as are enclosable in a finite number of non-overlapping polygons, of arbitrarily small diameter, lying in the domain of regularity of the function — takes on all its values on its set of singularities. 2) Let $f(x)$ be a bounded, one-valued, analytic function, defined on a punctiform subset P of its set S of singularities, where P is both open and closed on S ; then the set of values of f on P contains interior points or is punctiform according to whether f takes on some value, at an infinite number of regular points, in every vicinity of P , or not.

Blumberg (Columbus).

Hiong, K. L.: Sur les fonctions méromorphes dans le cercle-unité. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1764—1767 (1933).

Verf. kündigt eine Reihe interessanter Ergebnisse über die Wertverteilung meromorpher Funktionen im Einheitskreise an. Er kann Fortschritte erzielen bei der Erfassung von Funktionen unendlicher Ordnung, auf dem Gebiete der multiplikativen Darstellung bei positivem Geschlecht und bei unendlicher Ordnung; schließlich kann er auch einen Satz von Valiron über Borel-Punkte auf dem Rande des Einheitskreises auf unendliche Ordnung übertragen (vgl. dies. Zbl. 3, 405/6).

Ulrich (Marburg, Lahn).

Winn, C. E.: Sur le nombre de zéros d'une classe de fonctions analytiques dans un secteur. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 14—16 (1933).

Ist $f(z)$ ganz und vom Normaltypus der Ordnung 1, so kann die Nullstellenanzahl durch $O(r)$ abgeschätzt werden. Das gilt auch schon, wenn $f(z)$ nur in einem um die reelle Achse symmetrisch gelegenen Winkelraum von einer Breite $\leq \pi$ die obigen Voraussetzungen erfüllt, wozu freilich noch nach Angabe des Verf. hinzugefügt werden muß, daß $f(z)$ auf der reellen Achse nicht zu rasch gegen Null strebt. Verallgemeinerungen liegen auf der Hand.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Calugaréano, Georges: Sur le théorème de M. Borel dans le cas des fonctions méromorphes d'ordre infini. Mathematica 7, 61—69 (1933).

Identisch mit der in diesem Zbl. 7, 168, ref. Arbeit.

Valiron, Georges: Remarques sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes. Rend. Circ. mat. Palermo 57, 71—86 (1933).

Die verschiedenen Definitionen von Ausnahmewerten (AW) einer meromorphen Funktion werden vergleichend untersucht. Dem Picardschen AW, der höchstens endlich oft angenommen wird, treten Verschärfungen nach 3 Richtungen gegenüber, alle mit dem Ziel, Werte, die unendlich oft, im Vergleich mit anderen aber selten angenommen werden, zu kennzeichnen. Dies geschieht stets durch Vergleich der Anzahlfunktion $N(r, z)$ mit einer für die meromorphe Funktion typischen Größe, der Charakteristik $T(r, f)$; als Vergleichsgrund dienen Wachstumsordnung, -typus und -klasse (Borel, Lindelöf, G. Valiron), Konvergenzuntersuchung eines gewissen Integrals (Calugaréano, vgl. dies. Zbl. 7, 168) und schließlich \lim und \liminf des Quotienten $N:T$ für $r \rightarrow \infty$ (Nevanlinna, Valiron). Wir bezeichnen entsprechend die verschiedenen Typen der AW durch Anfangsbuchstaben (z. B. NAW, CAW). — Das Vorhandensein zweier BAW bedingt regelmäßiges Wachstum von $T(r, f)$, so daß jene AW auch AW im Sinne N und C sind; diese Aussage kann erweitert werden, setzt aber wesentlich zwei starke AW voraus. Umgekehrt werden Funktionen konstruiert mit einem BAW, der weder im Sinne von N noch dem von C ein AW ist. In die Definition eines CAW geht noch eine wachsende Funktion $C(x)$ ein; es bleibt offen, ob es BAW gibt, die für kein $C(x)$ auch CAW sind; doch können Funktionenpaare mit je einem BAW gegeben werden, derart, daß für jedes $C(x)$ mindestens einer dieser Werte Normalwert und nicht Ausnahmewert ist.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Valiron, Georges: Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de Borel d'ordre ρ divergent. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1458—1460 (1933).

Sei $f(z)$ ganz, vom Normaltypus der Ordnung 1 und habe im Winkelraume $|\arg z| < \pi/2\rho$ die Nullstellen $r_n e^{i\omega_n}$; dann kann aus der Konvergenz des Integrals

$$\int_1^{\infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr$$

auf den Randstrahlen des Winkelraums $\varphi = \pm \pi/2\rho$ die Konvergenz der Reihe

$$\sum \frac{\cos \rho \omega_n}{r_n^{\rho}}$$

erschlossen werden. Darin liegt eine bemerkenswerte Übertragung eines klassischen Satzes der Wertverteilungslehre (vgl. z. B. Nevanlinna, Théorème de Picard-Borel, S. 30ff. Paris 1929) von Vollumgebungen der wesentlichen Singularität auf Teilumgebungen. Der Satz läßt sich übrigens noch weiter führen. — Ferner wird eine Reihe von Beispielen ganzer Funktionen konstruiert, welche genau 2 Borelsche Divergenzrichtungen zur Ordnung ρ haben (vgl. dies. Zbl. 3, 263). *Ullrich* (Marburg).

Ritt, J. F.: Integral functions obtained by compounding polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 627—632 (1933).

Es sei eine Folge von Polynomen $P_n(z) = z + Q_{n2}z^2 + \dots + Q_{nm}z^m$ von beschränkten Graden ($\leq m$) vorgelegt. Diese Polynome mögen auf zwei Arten ineinander geschachtelt werden: Man setze $P_1 = Q_1 = R_1$ und dann

$$Q_{n+1} = Q_n(P_{n+1}) \quad \text{oder} \quad R_{n+1} = P_{n+1}(R_n).$$

Es werden hinreichende Bedingungen dafür gesucht, daß die Folgen Q_n und R_n auf jedem endlichen Bereich der Ebene gleichmäßig, also gegen eine ganze Funktion, konvergieren. Für die Folge Q_n kann dies z. B. behauptet werden, wenn alle $|a_{nk}|$ kleiner bleiben als die Glieder c_n einer konvergenten Reihe mit positiven Gliedern. Für

die Konvergenz der Folge R_n ist hinreichend, daß $|a_{nk}| \leq c_n$ ist, wobei nun $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} < 1$ gefordert wird. Für die Zweige der Umkehrfunktionen von so erzeugten ganzen Transzendenten bestehen übrigens einfache algebraische Beziehungen (vgl. dies. Zbl. 5, 301, Marty). *Ullrich* (Marburg, Lahn).

Bureau, Florent: Sur les valeurs lacunaires des fonctions entières de genre fini. (56. sess., Bruxelles, 25. VII. 1932.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 29—31 (1932).

Verf. berichtet über die Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts p und einem allfälligen endlichen Picardschen Ausnahmewert, welche neuerdings von ihm und Calugaréano untersucht wurden. Die Sätze beider Verff. lassen in den Ausnahmewerten Nullstellen gewisser Determinanten erkennen, die aus den Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihe und einer Unbestimmten t aufgebaut sind; während aber Bureaus Determinanten Polynome in t höchstens vom Grade p sind, haben die von Calugaréano mindestens diesen Grad; in einem Spezialfall stimmen beide überein, allgemein sind C.'s Determinanten Linearkombinationen der B.-schen. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

Leemans, J.: Sur les fonctions elliptiques. Intégration des fonctions rationnelles de $sn x, cn x, dn x$. Mathesis 47, 154—160 (1933).

Myrberg, P. J.: Sur une représentation nouvelle des fonctions automorphes. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 730—732 (1933).

Es handelt sich um eine Methode zur Darstellung der automorphen Funktionen derjenigen Grenzkreisgruppen vom Geschlecht 2, deren Riemannsche Flächen sich in die des Gebildes

$$y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - e_4)(x - e_5)$$

transformieren lassen. Eine solche Grenzkreisgruppe ist Untergruppe des Index 2 innerhalb einer der Grenzkreisgruppen Γ_0 vom Geschlecht 0, wie sie in einer früheren

Arbeit des Verf. [Acta math. 59, 329 (1932); dies. Zbl. 5, 296] zu ähnlichen Zwecken untersucht wurden. Verf. betrachtet die Änderungen des Integrals

$$u(z) = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

bei Ausübung der Substitutionen von Γ_0 auf die uniformisierende Variable z und insbesondere die Untergruppe Γ_u derjenigen Substitutionen S von Γ_0 , bei deren Ausübung sich $u(z)$ nicht ändert. Γ_u ist eine Grenzkreisgruppe des Geschlechtes 0 von einem der auch früher untersuchten Typen, und so erhält Verf. die folgende Darstellung:

$$\frac{u(z) - u(a)}{u(z) - u(b)} : \frac{u(z_0) - u(a)}{u(z_0) - u(b)} = \prod_{\Gamma_u} \left\{ \frac{S(z) - a}{S(z) - b} : \frac{S(z_0) - a}{S(z_0) - b} \right\}.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich eine Produktentwicklung für $x - x_0 = \wp(u) - \wp(u_0)$, wenn man die rechte Seite durch ϑ -Funktionen, diese durch unendliche Produkte darstellt und in deren Faktoren die Produktentwicklung für das obige Doppelverhältnis einträgt. Im dabei entstehenden unendlichen Produkt wird — allerdings in bestimmter Reihenfolge — über die sämtlichen Substitutionen von Γ_0 summiert. — Zur Darstellung von y kann ähnlich vorgegangen werden, und so erhält man explizite Darstellungen von x und y durch die uniformisierende Variable. *Petersson* (Hamburg).

Cartan, Henri: Détermination des points exceptionnels d'un système de p fonctions analytiques de n variables complexes. Bull. Sci. math., II. s. 57, 334—344 (1933).

Die Transformation

$$w_i = f_i(z_1, \dots, z_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mit $f_i(z_1, \dots, z_n)$ analytisch in einem Punkte O (etwa mit den Koordinaten

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0)$$

bildet eine geeignete Umgebung von O eindeutig auf eine ein- oder mehrblättrige Umgebung des Bildpunktes von O über dem w_1, \dots, w_n -Raume ab; es sei denn, daß die Gleichungen

$$f_i(z_1, \dots, z_n) = f_i(0, \dots, 0) \quad (i = 1, \dots, n)$$

unendlich viele Lösungen in der Nachbarschaft von O aufweisen. Tritt dieses aber ein — und dafür ist im Falle $n > 1$ nicht erforderlich, daß die Funktionaldeterminante identisch verschwindet —, so sprechen wir von einem Ausnahmepunkte O . Verf. gibt nun eine Methode an, die gestattet, die Gesamtheit aller Ausnahmepunkte, die in genügender Nachbarschaft von O liegen, systematisch aufzufinden. Diese Gesamtheit der Ausnahmepunkte bildet — abgesehen von zwei trivialen Ausnahmen — immer ein oder mehrere (aber endlich viele) analytische irreduzible Mannigfaltigkeiten (gegebenenfalls von verschiedenen Dimensionen). — Alle Untersuchungen des Verf. beziehen sich zugleich auf den allgemeineren Fall: $w_i = f_i(z_1, \dots, z_n) \quad (i = 1, \dots, p), \quad p \geq n$.

Behnke (Münster i. W.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Paley †, R. E. A. C., N. Wiener and A. Zygmund: Notes on random functions. Math. Z. 37, 647—668 (1933).

Es sei α eine zufällige Variable mit gleichmäßiger Verteilung auf dem Intervall $(0; 1)$ und $\chi(\alpha, t)$ eine beliebige Funktion; jedem speziellen Wert von α entspricht also eine bestimmte Funktion $f(t) = \chi(\alpha, t)$; man sagt in diesem Falle, daß $f(t)$ eine zufällige Funktion ist. Nach dieser Methode hat N. Wiener [vgl. Acta math. 55, 117—258 (1930)] diejenigen zufälligen Funktionen eingeführt, welche ihm eine mathematische Theorie der Brownschen Bewegung zu entwickeln gestatteten [vgl. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 2, 131—174 (1923)]. Zu diesem Zwecke wählt Wiener eine ganz spezielle Funktion $\chi(\alpha, t)$, so daß bei einer beliebigen Funktion $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_0^1 F\{\chi(\alpha, t_1), \chi(\alpha, t_2) - \chi(\alpha, t_1), \dots, \chi(\alpha, t_n) - \chi(\alpha, t_{n-1})\} d\alpha = \\ & = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{t_k - t_{k-1}} \right] F(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Dann kann man voraussetzen, daß $x = f(t) = \chi(\alpha, t)$ die Lage eines Brownschen Teilchens im Zeitmomente t bei einer eindimensionalen Brownschen Bewegung ist, wenigstens wenn man von der Trägheitskraft des Teilchens absieht. Es wird jetzt bewiesen, daß für fast alle α gleichmäßig in t

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{f(t + \varepsilon) - f(t)\} / \varepsilon^\lambda = 0$$

gilt, wenn nur $\lambda < \frac{1}{2}$ ist. Daraus folgt insbesondere, daß $f(t)$ mit der Wahrscheinlichkeit Eins stetig ist; die letzte Tatsache wurde von Wiener schon früher bewiesen. Ist dagegen $\lambda > \frac{1}{2}$, so ist fast sicher, daß

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} |f(t + \varepsilon) - f(t)| / \varepsilon^\lambda = +\infty$$

ist. Der Fall $\lambda = \frac{1}{2}$ bleibt bei Verf. unentschieden, die Lösung folgt aber auch in diesem Falle aus den feineren Untersuchungen von Khintchine [vgl. Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik 2, Heft 4 (1933), letztes Kapitel]. — Viel allgemeinere zufällige Funktionen $\varphi(x)$ erhält man in der Form

$$\varphi(x) = \int K(x, t) d f(t),$$

wobei $f(t)$ die Wiensche zufällige Funktion ist. Wählt man jetzt ein vollständiges normiertes System von orthogonalen Funktionen $b_n(t)$ und setzt

$$K(x, t) = \sum a_n(x) b_n(t),$$

so erhält man

$$\varphi(x) = \sum \int b_n(t) d f(t) a_n(x) = c_n a_n(x)$$

wobei die zufälligen Größen c_n gegenseitig unabhängig sind und dem Gaußschen Verteilungsgesetz unterliegen. Man sieht also, daß Wiensche zufällige Funktionen $\varphi(x)$ auch durch Reihen mit zufälligen Koeffizienten bestimmt werden können; solche Reihen wurden in einigen früheren Arbeiten von Paley und Zygmund untersucht. Verf. übertragen jetzt mehrere Resultate von Paley und Zygmund auf Wiensche zufällige Funktionen. *A. Kolmogoroff*.

Jouravsky, A.: Sur le théorème limite du calcul des probabilités. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 4, 9—36 (1933) [Russisch].

Die Abhandlung enthält einen Beweis des Ljapounoffschen Grenzwertsatzes für den ein- und mehrdimensionalen Fall. Der Ansatz ist dem Ljapounoffschen sehr nahe; durch eine Abänderung des Diskontinuitätsfaktors wird jedoch die Beweisführung wesentlich erleichtert und insbesondere die Einführung einer Hilfsvariablen vermieden. Die Voraussetzungen sind die üblichen Ljapounoffschen; es wird auch eine Abschätzung des Restgliedes angegeben.

A. Khintchine (Moskau).

De Finetti, B.: Classi di numeri aleatori equivalenti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 107—110 (1933).

Als eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffes der äquivalenten zufälligen Erscheinungen [vgl. B. de Finetti, Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio. Mem. Accad. naz. Lincei 4, 86—133 (1930)] betrachtet Verf. die äquivalenten zufälligen Größen. Eine Menge von zufälligen Größen bildet eine Klasse von äquivalenten zufälligen Größen, wenn das n -dimensionale Verteilungsgesetz von irgendwelchen n Größen aus dieser Menge nur von n abhängig ist. Nach einigen elementaren Bemerkungen verspricht Verf. in einer weiteren Note mehrere interessante Eigenschaften von äquivalenten zufälligen Größen zu beweisen.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Bendersky, L.: Sur la fonction de probabilité relative au théorème de Laplace et les grandeurs qui s'y rattachent. Bull. Sci. math., II. s. 57, 236—272 u. 282—312 (1933).

Untersuchungen über einen angenäherten Ausdruck der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von unabhängigen zufälligen Größen. *Bruno de Finetti*.

Lurquin, Constant: Sur la généralisation du problème de Pascal. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 149—162 (1933).

Considérations élémentaires concernant le problème connu posé par le chevalier de Méré et résolu par Pascal.

A. Khintchine (Moskau).

Marshall, J. B.: The probability distribution of a bridge hand. Math. Notes Nr 28, XVI—XVIII (1933).

Huhn, R. von: Secondary curves as a measure of the lag or phase difference between two primary curves. J. Amer. Statist. Assoc. 28, 312—327 (1933).

In this paper the author develops a graphical method for measuring the lag between two time series curves by making use of their ogives.

Craig (Ann Arbor).

Merzrath, E.: Anpassung von Flächen an zweidimensionale Kollektivgegenstände und ihre Auswertung für die Korrelationstheorie. *Metron* 11, Nr 2, 103—136 (1933).

The author concerns himself with frequency distributions in two variables, the correlation surfaces for which may be represented by one of the two functions:

$$P_x(x, y) e^{-\frac{1}{2}(x^2/\sigma_x^2 + y^2/\sigma_y^2)} \quad \text{and} \quad P_x(x, y) e^{-\frac{x^2 + y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$$

in which $P_n(x, y)$ is an n th degree polynomial in x and y . He points out a sense in which the graduation of frequency distributions by such functions by the method of moments gives a least squares best fit, and gives relations for determining the parameters for these two functions in terms of moments. He shows that for these functions the independence of x and y implies that $P_n(x, y)$ is the product of a polynomial in x by one in y . He shows how to determine a measure of correlation depending on the volume between the regression lines introduced by Hagström (*Skand. Aktuarie Tidskr.* 1930, 193) in these two cases. Next he discusses the determination of the "correlation direction", which he defines as the direction of the line through the origin along which the frequency under the correlation surface is a maximum. Finally he considers the volume under the surface contained between a pair of parallel lines each 1/2 unit distant from the origin and shows for the second of his two functions how to determine the direction of the lines for which this volume is a maximum. Then the volumes between pairs of lines drawn in this direction at different distances apart but equidistant from the origin furnish a measure of the "band-correlation". There is an illustrative numerical example.

Craig (Ann Arbor).

Wilson, Edwin B., and Ruth R. Puffer: Least squares and laws of population growth. *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* 68, 285—382 (1933).

The fitness of the Malthusian law $P = Ce^{nt}$ and of the logistic of Verhulst to be regarded as laws of population growth is discussed at length. Methods of fitting these curves to data are reviewed and the use of the least squares method in the case of the logistic is very thoroughly discussed. The results in many numerical examples are given. The authors have fitted the logistic to actual populations "even more clearly than has been done by others", but their conclusions as to the advisability of using it for extrapolation are mainly negative.

Cecil C. Craig (Ann Arbor, Michigan).

Koeppler, Hans: Zur begründenden Darstellung des ferneren Risikos verwickelter Versicherungsformen. *Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H.* 28, 51—76 (1933).

Ein Versicherter mit dem Eintrittsalter x scheide bei Eintreffen eines Ereignisses erster Art aus, welches mit den Wahrscheinlichkeiten ${}_{r-1}|p_x^{(1)}$ ($r = 1, 2, \dots, n$) im r -ten Versicherungsjahr eintreten kann und die Auszahlung von $S_r^{(1)}$ zur Folge hat, oder bei Eintreffen eines Ereignisses zweiter Art, welchem die Wahrscheinlichkeiten ${}_{r-1}|p_x^{(2)}$ und die Versicherungszahlungen $S_r^{(2)}$ entsprechen, oder schließlich bei Nicht-eintreffen dieser Ereignisse während der ganzen n -jährigen Versicherungsdauer, was mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \sum_{(r)} {}_{r-1}|p_x^{(1)} - \sum_{(r)} {}_{r-1}|p_x^{(2)}$ zu erwarten ist und die Zahlung von $S_n^{(3)}$ nach sich zieht. Der Versicherte entrichte bis zur Fälligkeit einer Versicherungszahlung die dem Äquivalenzprinzip entsprechende jährliche Nettoprämie. — Ein Bestand von s so definierten Versicherungen sei bereits seit t Jahren in Kraft und es seien die rechnungsmäßigen Reserven V_λ , $\lambda = 1, 2, \dots, s$, vorhanden. Das fernere mittlere Risikoquadrat betrage für die λ -te Versicherung M_λ^2 . $P(\mathfrak{R})$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß die auf die Gegenwart diskontierte Differenz aller künftigen Ausgaben und Einnahmen gerade \mathfrak{R} beträgt. Es wird mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen sehr einfach gezeigt, daß $\sum_{(\mathfrak{R})} P(\mathfrak{R}) \cdot \mathfrak{R} = \sum_{(\lambda)} V_\lambda$ und

$$\sum_{(\mathfrak{R})} P(\mathfrak{R}) \mathfrak{R}^2 = \left(\sum_{(\lambda)} V_\lambda \right)^2 + \sum_{(\lambda)} M_\lambda^2$$

gilt. Die Anlage der Überlegungen gestattet die Tschebyscheffsche Ungleichung leicht anzuwenden und die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $|\mathfrak{R} - \sum_{(\lambda)} V_\lambda| \leq h$ durch h

und $\sum_{(A)} M_A^2$ auf die übliche Art abzuschätzen. — Unter der Voraussetzung einer sehr großen Anzahl von Versicherungen werden mit Hilfe von größtenteils auf Laplace zurückgehenden analytischen Ansätzen asymptotische Ausdrücke für $P(\mathfrak{R})$ bzw. $\sum_{\mathfrak{R}=-a}^{+a} P(\mathfrak{R})$ hergeleitet. — Druckfehler: S. 53, drittletzte Zeile soll es

$$t-1, p_{x+k}^{(1)} = p_{t-1}^{(1)}, \quad t-1, p_{x+k}^{(2)} = p_{t-1}^{(2)}$$

heißen.

Birnbaum (Lwów).

Geometrie.

Gottschalk, Adolf: Die Beziehungen zwischen den Seiten und Diagonalen eines ebenen n -Ecks. *Euclides* 10, 44–50 (1933).

Takeya, Sôichi: A geometrical problem interpreted by complex numbers. *Tôhoku Math. J.* 37, 279–283 (1933).

Es handelt sich um die Aufgabe: n Punkte P_i , $i = 1, 2, \dots, n$, im Kreise $|z| \leq 1$ derart zu verteilen, daß die Summe $\sum_{k,l} \overline{P_k} P_l^\lambda = \sum_{k,l} |z_k - z_l|^\lambda$, $\lambda > 0$, ihren größten Wert annimmt. Die zu erfüllende Bedingung ist, daß $\sum_l |z_k - z_l|^\lambda J \{z_k / (z_l - z_k)\} = 0$ wird, für jedes $k = 1, 2, \dots, n$; die Aufgabe wird nur für $\lambda = 1$ und 2 vollständig gelöst.

Karamata (Beograd).

Cattaneo, Paolo: Su una particolare coppia di conoidi del circolo. *Period. Mat.*, IV. s. 13, 296–300 (1933).

Villa, Mario: Sulle reti omaloidiche di pseudoeconiche. *Boll. Un. Mat. Ital.* 12, 219–222 (1933).

Turri, Tullio: I tipi di correlazioni reali nel piano e nello spazio. *Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari* 3, 89–94 (1933).

Crudeli, U.: Sul problema fondamentale di Stekloff nella teoria dei campi vettoriali. *Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari* 3, 33–34 (1933).

Grüss, Gerhard: Ein elementargeometrisches Beispiel zur Dyadenrechnung. *S.-B. Berlin. math. Ges.* 32, 45–52 (1933).

Galli, Adriano: Sulle deformazioni pure infinitesime. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 3, 55–58 (1933).

r sei ein von Null verschiedener Vektor, e eine auf r senkrechte Ebene, D sei eine räumliche Dilatation, r' bzw. e' die Bilder von r bzw. e bei D , und r'' der Vorgänger von r . Dann kann man analytisch leicht sehen, daß r'' auf e' senkrecht steht. Von dieser Tatsache werden einige einfache Spezialisierungen und Anwendungen mitgeteilt. Ist z. B. D infinitesimal, so liegen r , r' , r'' in einer Ebene, und r halbiert den Winkel zwischen r' und r'' . Es werden die übrigen Fälle angegeben, in denen r , r' , r'' koplanar sind.

Cohn-Vossen (Locarno).

Rehbock, F.: Über parabolische Risse. *Math. Ann.* 109, 17–59 (1933).

Von der bekannten allgemeinen Abbildung der Raumgeraden G auf die Geradenpaare G', G'' in der Bildebene π wird der besondere Fall behandelt: wenn ϱ_1 und ϱ_2 Ebenen, ferner r_1 und r_2 Punkte auf $\varrho_1 \varrho_2$ sind, so ist $G' = G_{\varrho_1} r_1 \pi \cdot G_{\varrho_2} r_2 \pi$ und $G'' = G_{\varrho_1} r_2 \pi \cdot G_{\varrho_2} r_1 \pi$. In π spielt dann eine nichteuklidische Geometrie eine Rolle, deren absolutes Gebilde das Geradenpaar $\pi \varrho_1, \pi \varrho_2$ ist. Einer Strahlkongruenz entspricht in π eine Geradenverwandtschaft, insbesondere bildet sich ein Strahlfeld auf eine „Bewegung“, ein Strahlbündel auf eine „Umlegung“ ab. Dies wird in allen Sonderfällen eingehendst untersucht. Durch Dualisierung und metrische Spezialisierung geht diese Abbildung in die sog. kinematische Abbildung von Blaschke und Grünwald über.

Eckhart (Wien).

Pascal, Mario: Sul moto di una figura deformabile piana di area costante e che rimane affine a sè stessa. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 3, 71—77 (1933).

L'A. montre l'existence d'un centre C instantané de vitesse nulle et que les courbes de courant sont des coniques (voir aussi, N. Abramesco, Sur le mouvement des figures planes variables avec conservation de similitude ou d'aire, *Bulletin de la Société roumaine des sciences*, 26, Janvier-Juillet 1924). Il existe sur chaque droite qui ne passe par C , les points Q_1 et Q (orthopôle), dont les vitesses sont respectivement parallèles ou perpendiculaires sur la droite sur laquelle se trouvent. Le lieu de Q_1 est une conique et de Q une hyperbole équilatère. Il existe seulement une paire de droites passant par C , dont tous les points ont les vitesses parallèles à ces droites et seulement une paire de droites orthogonales dont tous les points ont les vitesses perpendiculaires à ces droites. Il trouve des relations entre ces droites orthogonales et les axes des coniques décrites par Q , coniques lieu des points de même vitesse et coniques de courant. Pour le mouvement continu, il introduit la roulante (lieu de C sur le plan mobile) et la base (lieu de C sur le plan fixe).

N. Abramesco (Cluj).

Pascal, Mario: Sul moto di una figura deformabile piana che si conserva affine a sè stessa. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 3, 78—82 (1933).

On trouve des résultats analogues au cas du mouvement avec conservation d'aire, mais le lieu des orthopôles Q est une conique, les lignes de courant sont les déformées affines de la spirale logarithmique.

N. Abramesco (Cluj).

Pascal, Mario: Sul centro istantaneo di velocità nulla nel moto di una figura piana di area costante e a deformate affini. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 3, 110—113 (1933).

On montre que tous les points des droites, qui passent par la centre instantané C , à un moment donné, ont le vecteur vitesse également incliné sur ces droites, d'où l'on déduit une construction du point C . Introduisant la notion de normale affine, l'auteur étend les théorèmes de Chasles sur le déplacement d'une figure plane de forme invariable (voir aussi, N. Abramesco, Sur le centre instantané de mouvement d'une figure plane variable avec conservation d'aire, *Nouvelles Ann. Math.*, VI. s. 1, Avril 1926).

N. Abramesco (Cluj).

Pascal, Mario: Sull'accelerazione nel moto di una figura piana di area costante e a deformate affini. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 3, 123—126 (1933).

On montre l'existence d'un centre G d'accélération nulle, et sur chaque droite qui ne passe par G il existe un point R (orthopôle), dont l'accélération est perpendiculaire à la droite. Il existe seulement une paire de droites, qui passent par G , dont tous les points sont orthopôles. Le lieu des points pour lesquels les vecteurs vitesse et accélération sont parallèles est la conique des inflexions.

N. Abramesco (Cluj).

Pascal, Mario: Sulla cinematica affine di una figura piana di area costante. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 3, 142—144 (1933).

En utilisant la notion de longueur affine d'un arc, définie par Blaschke, l'auteur retrouve quelques résultats exposés plus haut, et montre que le lieu des points qui ont, à un moment donné, la vitesse affine nulle, est la conique des inflexions. Abramesco.

Blaschke, Wilhelm: Ein Satz von Graf und Sauer. *Tôhoku Math. J.* 37, 69—76 (1933).

Die Arbeit macht den Satz von Graf und Sauer: „Das allgemeinste geradlinige Sechseckgewebe besteht aus den Tangenten einer Kurve 3. Klasse“ sowie den damit zusammenhängenden Satz von Thomsen über Sechseckgewebe leichter zugänglich. Zunächst wird (nach Plücker) der Satz von Brianchon auf Grund des Satzes von Bézout bewiesen, dann ein Satz von Chasles: Jede acht Geraden eines „Brianchon-Sechsecks“ berührende Kurve 3. Klasse berührt auch die neunte. Wichtiges Hilfsmittel ist eine Figur D_n , die zu einem gleichmäßig unterteilten gleichseitigen Dreieck top. äquivalent ist. Bei genügend feiner Unterteilung bestimmt ein geradliniges D_n eine K. 3. Klasse eindeutig. Ebenso läßt sich in jedes Tangendendreieck einer K. 3. Klasse

eine Tangenten- D_n einzeichnen. Der Beweis liefert zugleich die eine Hälfte des Thom-senschen Satzes.

Günter Howe (Hamburg).

Delaunay, B. N.: Sur les systèmes parallélépipédaux les plus compacts des sphères égales dans les espaces à 3 et à 4 dimensions. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 4, 63 bis 69 (1933) [Russisch].

The author gives a synthetic proof of the well known theorems about the densest parallelepipedal dispositions of the balls in the spaces of 3 and 4 dimensions. He begins with threedimensional space. Taking an arbitrary position of the balls he shows, that in the way of gradual condensation this system it is possible to obtain the series of balls which touch in pairs one on other. With further condensation of this system it is possible from these series to form the layers consisting from the series touching in pairs one another. The final condensation of the system is achieved by the rolling one layer on the other so, that the balls of the one roll in the holes of the other. By this way is achieved in threedimensional space the unique densest disposition of balls. At this disposition among the layers there exist a densest layer which together with the neighbouring layers gives a tetrahedral disposition of balls. Analogical method of gradual condensation of arbitrary system of fourdimensional balls and rolling one of the layers on an other carries to two densest dispositions fourdimensional balls in fourdimensional space. One of them is tetrahedral and the other one which is more dense represents a singular disposition. All the investigation is carried synthetically. *Nil Glagoleff*.

Favard, J.: Sur la détermination des surfaces convexes. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 65—75 (1933).

Unabhängig von Süß (vgl. dies. Zbl. 6, 176) gibt der Verf. denselben Beweisgang an für den Christoffelschen Satz über die Bestimmung einer konvexen Fläche durch die Summe der Hauptkrümmungsradien als Funktion der Normalenrichtung. Die im genannten Referat erwähnte Schwierigkeit beim Nachweis, daß die als Lösung eines Variationsproblems gefundene Fläche die Forderungen der Aufgabe wirklich erfüllt, scheint jedoch dem Ref. auch hier nicht überwunden.

W. Fenchel.

Aleksandroff, A. D.: Un théorème sur les polyèdres convexes. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 4, 87 (1933) [Russisch].

The author proofs by synthetic method the theorem: If all the faces of polyhedron have a centre of symmetry the polyhedron has it too. — The theorem is correct for a space of n dimensions ($n > 2$).

Nil Glagoleff (Moskow).

Aleksandroff, A. D.: Déduction élémentaire du théorème sur le centre d'un paralléloèdre convexe à 3 dimensions. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 4, 89—99 (1933) [Russisch].

The author studies the fundamental properties of convex threedimensional parallelohedrons dividing them in two types: a) the normal parallelohedrons filling up the space touching one an other by whole faces and b) unnormal filling up the space touching one an other by parts of the faces. At first he marks the properties of normal parallelohedrons. To each face P of such a one corresponds the equal and parallel to it face ($-P$) of the same parallelohedron and it has no other faces parallel to P . The conjunction of the faces parallel to one of the edges forms, so called, zone, consisting of six faces. The parallelohedrons having common faces of zone form a zonelayer. The plan crossing through the middle of the edges of the zone is called the plan of the layer. The totality of parallelohedrons filling up the space is divided into zonelayers and corresponding points of parallelohedrons form parallelepipedal system. The author investigates the position of parallelohedrons in the space proving the impenetrability of zonelayers and getting an elementary proof of the Minkowsky theorem about the existence of parallelohedrons centre. The author makes a like investigation of unnormal parallelohedrons too. He studies by detail all possible cases of the touch of unnormal parallelohedrons proving, that each time they have parallelepipedal zone and each

of them has a centre of symmetry. — The whole investigation is carried out by synthetic method.

Nil Glagoleff (Moskow).

Menger: Neuer Aufbau der Vektoralgebra. Erg. math. Kolloqu. H. 5, 27—29 (1933).

Sei V eine Menge von Elementen, Vektoren genannt. Je 2 Elementen v und w von V sei eine reelle Zahl $(vw) = (wv)$ zugeordnet, welche das innere Produkt heißt und für $v \neq w$ der Bedingung $(vv) + (ww) \neq 2(vw)$ genügt. Damit V mit einer Menge V' von Vektoren des R_n isomorph sei (d. h. auf V eineindeutig und „inneres Produkt-treu“ abgebildet werden kann), ist notwendig und hinreichend, daß 1. $\Gamma(v_1 \dots v_{n+1}) = 0$ für je $n+1$ Elemente von V und 2. $\Gamma(v_1 \dots v_k) \geq 0$ für je k Elemente von V für $k = 1, \dots, n$. (Falls V genau $n+2$ Elemente v_1, \dots, v_{n+2} enthält, tritt die Bedingung $\Gamma(v_1 \dots v_{n+2}) = 0$ hinzu.) Dabei bedeutet Γ die bekannte Gramsche Determinante $|(v_i v_j)|$ der inneren Produkte. Die Notwendigkeit läuft auf den bekannten Satz hinaus, daß Γ für n Vektoren des $R_n \geq 0$ und zwar $= 0$ genau dann, wenn die Vektoren abhängig sind. Um zu zeigen, daß die Bedingungen ausreichen, wird V durch die Abstandsdefinition $vw = +\sqrt{(vv) + (ww) - 2(vw)}$ zu einem metrischen Raum gemacht, der den Mengerschen Bedingungen für abstandstreue Einbettung in den R_n genügt. Ist V vollständig, konvex und konvex nach außen, was durch das innere Produkt ausgedrückt werden kann, so lassen sich Multiplikation mit Skalaren und Vektoraddition durch das innere Produkt definieren. *Nöbeling (Erlangen).*

Wald: Vereinfachter Beweis des Steinitz'schen Satzes über Vektorenreihen im R_n . Erg. math. Kolloqu. H. 5, 10—13 (1933).

Wald: Bedingt konvergente Reihen von Vektoren im R_ω . Erg. math. Kolloqu. H. 5, 13—14 (1933).

Aus dem Steinitz'schen Satz, daß die „Werte“ einer bedingt konvergenten Reihe, bei allen möglichen Umordnungen, eine lineare Menge bilden für Reihen aus Vektoren eines endlich dimensionalen Vektorraumes wird dieser für bedingt konvergente Reihen eines unendlich dimensional Vektorraumes hergeleitet. *Reinhold Baer.*

Wald: Reihen in topologischen Gruppen. Erg. math. Kolloqu. H. 5, 14—16 (1933).

Ist G eine additiv geschriebene, kommutative, topologische Gruppe, so besteht die Summenhäufungsmenge einer abzählbaren Menge $M \leq G$ aus allen Häufungspunkten der Folgen $\left\{ \sum_{i=1}^n x_i \right\}$ für beliebige Abzählungen x_1, \dots, x_i, \dots der Menge M .

Eine solche Summenhäufungsmenge enthält mit a, b, c auch $a - b + c$, d. h. ist entweder leer oder eine Schar.

Reinhold Baer (Manchester).

Markoff, André: Sur les espaces vectoriels considérés comme groupes topologiques. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 610—612 (1933).

Jede zusammenhängende, im kleinen kompakte und kommutative topologische Gruppe läßt sich homomorph und doppelstetig [d. h. Bild und Urbild abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen] auf einen endlich-dimensionalen Vektorraum abbilden, so daß die Urbilder bikompakter Mengen bikompakt sind. Hieraus folgt: Dann und nur dann ist eine topologische Gruppe topologisch isomorph auf einen endlich-dimensionalen Vektorraum abbildbar, wenn sie kommutativ, zusammenhängend, im kleinen bikompakt ist und außer $\{1\}$ keine bikompakten Untergruppen enthält. *R. Baer.*

Menger, Karl: Über den imaginären euklidischen Raum. Tôhoku Math. J. 37, 475—478 (1933).

Eine Punktmenge heiße komplexmetrisch, wenn je zwei Punkten p, q eine solche komplexe Zahl $pq = qp$ als Entfernung zugeordnet ist, daß 1. $pp = 0$ für jedes p , 2. es zu jedem Paar $p \neq q$ einen Punkt r gibt mit $pr \neq qr$. Der komplexe n -dimensionale euklidische Raum K_n bestehe aus allen n -Tupeln (x_1, \dots, x_n) komplexer Zahlen mit der Entfernungsdefinition $xy = \sum (x_i - y_i)^2$. Durch Forderungen über $(n+2)$ - und $(n+3)$ -reihige Determinanten der Form $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p^i p^j \end{vmatrix}$ werden die komplex-

metrischen Mengen charakterisiert, welche sich abstandstreu auf eine Teilmenge der reellen n -Tupel des K_n oder auf eine Teilmenge der rein imaginären n -Tupel des K_n abbilden lassen.

H. Busemann (Kopenhagen).

Wald, A.: Komplexe und indefinite Räume. Erg. math. Kolloqu. H. 5, 32—42 (1933).

1. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorangehenden Referats heiße eine Teilmenge M des K_n linear abhängig, wenn es $n+1$ komplexe Zahlen $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ gibt, so daß für alle Punkte (x_1, \dots, x_n) aus M die Beziehung $\lambda_0 + \sum_{v=1}^n \lambda_v x_v = 0$ gilt.

Es wird gezeigt, daß sich linear abhängige Teilmengen des K_n abstandstreu auf Teilmengen des K_{n-1} abbilden lassen u. ä. 2. Es werden die metrischen Mengen gekennzeichnet, welche sich kongruent auf Teilmengen indefinit-euklidischer Räume (d. h. Räume von n -Tupeln reeller Zahlen mit der Entfernungsdefinition $\sum \varepsilon_i (x_i - y_i)^2$, $\varepsilon_i = \pm 1$) abbilden lassen, und zwar wieder durch Forderungen über das Vorzeichen

von Determinanten der Form $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p^i p^j \end{vmatrix}$.

H. Busemann (Kopenhagen).

Piazolla-Beloch, M.: Sopra una classe notevole di curve topologiche piane. Rend. Circ. mat. Palermo 57, 299—307 (1933).

Les résultats de cette Note sont déjà résumés dans un autre travail (v. ce Zbl. 6, 321).

Segre (Bologna).

● Thomsen, G.: Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung. (Hamburg. math. Einzelschr. H. 15.) Leipzig: B. G. Teubner 1933. VIII, 88 S. u. 33 Fig. RM. 4.50.

Das vorliegende Buch schließt an die Arbeit des Verf. an „Über einen neuen Zweig geometrischer Axiomatik . . .“ [Math. Z. 34 (1932); s. dies. Zbl. 3, 408; vgl. auch die kurze Note desselben Verf.: „Zum geometrischen Spiegelungskalkül“, Math. Z. 37 (1933); s. dies. Zbl. 7, 221]. Es wird eine vollständige Begründung der ebenen Elementargeometrie mit Hilfe des Gruppenkalküls gegeben. Dieser Begriff wurde bereits im Zbl. 3, 408 erklärt. Zu den allgemeinen Gruppenaxiomen nimmt Verf. 4 Zusatzaxiome über die spezielle Struktur der Gruppe hinzu, die sämtlich in der Bewegungsgruppe der Ebene erfüllt sind und die als im wesentlichen voneinander unabhängig nachgewiesen werden. Von diesen Zusatzaxiomen ist nur das zweite in unveränderter Gestalt aus der oben zitierten Arbeit übernommen. Von der zugrunde gelegten Gruppe G wird sonst nur noch vorausgesetzt, daß sie durch ihre involutorischen Elemente erzeugbar ist und daß die involutorischen Elemente in 2 teilerfremde Klassen geteilt sind, von denen eine mindestens 2 Elemente enthält. Genügt G den 4 Zusatzaxiomen, so läßt sich eine ebene Gruppengeometrie Γ konstruieren, in der insbesondere a) die ebenen Verknüpfungssätze mit Einschluß des Parallelenpostulats (bei Hilbert die Axiome I_1, I_2, I_3 und IV); b) der Pascalsche Satz für das Geradenpaar; c) die Kongruenzaxiome (bei Hilbert die Axiome III, nur in geeigneter Weise ohne den Anordnungsbegriff formuliert) gelten. Aus den Zusatzaxiomen folgt ferner in Übereinstimmung mit der Bewegungsgruppe der euklidischen Ebene, daß in G jedes Element der einen Klasse als Quadrat eines Gruppenelements darstellbar ist (Punktspiegelung), ein Element der anderen Klasse nie (Geradenspiegelung). In Γ sind alle Sätze gültig, die aus Hilberts (ebenen) Axiomen I—IV folgen, also alle Sätze der ebenen Elementargeometrie: wegen a) und b) erweist sich Γ nach Einführung einer Hilbertschen Streckenrechnung als analytische Geometrie eines Körpers. Man kann ferner auf Grund weiterer in Γ gültigen Sätze zeigen (der Beweis ist unterdrückt), daß dieser Körper reell ist, sich also nach einem algebraischen Satz von Artin und Schreier anordnen läßt. Überträgt man in bekannter Weise die Anordnung des Körpers auf die Anordnung der Geometrie, so sind damit in Γ auch die Hilbertschen Axiome II erfüllt. — Die Rolle der Existenzaussagen in der Gruppengeometrie wird besonders erörtert. Diese werden durch die allgemeinen Gruppenaxiome und wesentlich durch das 4. Zusatzaxiom in die Geometrie hineingetragen. Ihre vollständige Eliminierung, die für einen Teil elementargeometrischer Sätze gelingt, steht für die ganze Elementargeometrie noch aus. — Eine Begründung der räumlichen euklidischen Geometrie mit Hilfe des Spiegelungskalküls wird skizziert, ferner seine Anwendung auf die ebene projektive und hyperbolische Geometrie. — Die Lektüre des Hauptteils des Buches setzt keine Vorkenntnisse voraus, am Anfang wird der Gruppenbegriff eingeführt und die Gruppe der kongruenten Abbildungen der Ebene ausführlich untersucht. Das Buch setzt auch nicht die Kenntnis der oben zitierten Arbeit des Verf. voraus.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Tacchella, Giuseppe: *Fondamenti di geometria analitica a due ed a tre dimensioni dei luoghi lineari „composti“*. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 71, 1–52 (1933).

$F(x, y)$ bedeute einen Ausdruck der Form $F(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i |x \sin w_i + y \cos w_i + b_i| + m$, $G(x, y)$ einen Ausdruck der Form $F(x, y) + ax + by$. x, y seien ebene affine Koordinaten. Dann untersucht Verf. die durch $F(x, y) = 0$ bzw. $G(x, y) = 0$ dargestellten geometrischen Örter. Das sind nämlich geschlossene oder offene Streckenzüge, und umgekehrt kann jeder Streckenzug durch eine Gleichung dieser Art dargestellt werden. Die Algebra dieser „linearen Absolutgleichungen“ erweist sich als recht mannigfach. Vor allem kann eine Absolutgleichung nicht nur durch die Punkte eines Streckenzuges, sondern, wenn dieser geschlossen und konvex ist, auch durch alle Punkte des Innern erfüllt werden. Alle Ecken des durch $F(x, y) = 0$ dargestellten Streckenzuges müssen auf den Geraden liegen, deren Gleichungen man durch Nullsetzen eines Absolutterms von $F(x, y)$ erhält. Diese Geraden können je eine Strecke des Zuges tragen oder auch Diagonalen sein oder den Zug gar nicht treffen. Die Darstellung eines Zuges mit n Ecken ist nur für $n \leq 3$ eindeutig, sonst kontinuierlich vieldeutig. Die Anzahl der Terme kann hinter der Eckenzahl zurückbleiben. — Die analogen Ausdrücke in 3 Variablen geben räumliche Streckenzüge oder Polyederflächen, wobei im Falle geschlossener konvexer Polyeder die Gleichung so gewählt werden kann, daß auch das Innere dargestellt wird. — Simultane Auflösung mehrerer solcher Gleichungen stellt natürlich den Schnitt von Streckenzügen bzw. Polyedern dar. — Die Arbeit enthält eine große Zahl bezeichnender Beispiele, dagegen ist die algebraische Theorie noch nicht erschöpfend behandelt. Dies soll in einer Fortsetzung der Arbeit geschehen. — x und κ bedeuten ein und dasselbe, auch wenn beide Symbole in der gleichen Formel gedruckt sind.

Cohn-Vossen (Locarno).

Algebraische Geometrie:

Milne, William P.: *A special type of quintic symmetroid. II*. Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 207–216 (1933).

Verf. betrachtet einen speziellen Fall der Fläche Γ 5. Ordnung, welche der Ort der Punkte (x_1, x_2, x_3, x_4) des dreidimensionalen Raumes ist, wofür die Hyperfläche 2. Ordnung $x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3 + x_4 S_4 = 0$ ein Hyperkegel ist, wenn S_1, S_2, S_3, S_4 vier linear unabhängige quadratische Hyperflächen im vierdimensionalen Raume bestimmen. Diese Abhandlung enthält den Beweis des Satzes, daß, wenn S_1, S_2, S_3 und S_4 einander in 8 Paaren von zusammenfallenden Punkten schneiden, die Gleichung der

Fläche Γ geschrieben werden kann in der Form $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$. Hier sind a, b, h Formen

erster, f, g Formen zweiter und c eine Form dritter Ordnung in x_1, x_2, x_3, x_4 . Verf. behandelt die Eigenschaften des genannten Systemes quadratischer Hyperflächen, seiner Jacobischen Fläche und der Fläche Γ unter der erwähnten speziellen Voraussetzung.

G. Schaake (Groningen).

Milne, William P.: *Relation between the quadritangent hyperplanes of Noether's canonical curve for $p = 5$ and the 5-tangent conics of the plane quintic curve*. Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 217–234 (1933).

Die allgemeine ebene Kurve 5. Ordnung kann betrachtet werden als der Ort Δ der Bildpunkte der Hyperkegel eines Netzes quadratischer Hyperflächen (mit Basis-kurve C): $\xi U + \eta V + \zeta W = 0$, wenn man einer Fläche (ξ, η, ζ) dieses Netzes den Punkt einer Ebene π zuordnet, dessen homogene Koordinaten ξ, η, ζ sind. Den 1023 Systemen quadratischer Hyperflächen, welche C achtmal berühren, entsprechen 1023 Kegelschnitte, die Δ fünfmal berühren, und den 496 Hyperebenen, die C viermal berühren, sind in Paaren 992 andere Δ fünfmal berührende Kegelschnitte zugeordnet. Ein derartiges Paar von Kegelschnitten bildet den Ort des Bildpunktes (ξ, η, ζ) einer

quadratischen Hyperfläche des Netzes, welche eine C viermal berührende Hyperebene berührt. Verf. betrachtet die Beziehungen, welche zwischen den C viermal berührenden Hyperebenen und den Δ fünfmal berührenden Kegelschnitten bestehen. *Schaake*.

Segre, Beniamino: *Sulle curve algebriche che ammettono come trasformata razionale una curva piana dello stesso ordine, priva di punti multipli.* Math. Ann. 109, 1—3 (1933).

Severi, Francesco: *Sulle trasformate razionali di un'ipersuperficie algebrica priva di punti multipli.* Math. Ann. 109, 4—6 (1933).

In der ersten dieser zwei Arbeiten findet man einen geometrischen Beweis eines Satzes von H. Kapferer (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1931, 155—175; s. dies. Zbl. 4, 269). Wenn eine algebraische irreduzible Kurve C^n , der Ordnung n , eines beliebigen Raumes S_d ($d \geq 2$), in eine ebene und von mehrfachen Punkten freie Kurve C^n , derselben Ordnung n , rational verwandelt wird, und wenn $n > 3$ ist, so ist $d = 3$, und ist die Transformation zwischen den beiden Kurven eine Projektivität. Der Beweis besteht aus sehr einfachen Bemerkungen über Linearscharen von Punktgruppen auf C und C' . — In der zweiten Arbeit wird der Satz auf höhere algebraische Mannigfaltigkeiten ausgedehnt, ebenfalls als Anwendung der Methoden der italienischen algebraischen Geometrie. Wenn eine algebraische Mannigfaltigkeit F^n , der Ordnung n , eines Raumes S_d , in eine von mehrfachen Punkten freie Hyperfläche F^n , derselben Ordnung n , eines Raumes S_r ($r \leq d$), rational verwandelt wird, und wenn $n > r + 1$ ist, so ist die betrachtete Transformation eine Projektivität (so daß $d = r$ ist, und auch F' keinen mehrfachen Punkt besitzt). *E. G. Togliatti* (Genova).

Godeaux, Lucien: *Sur les courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles involutives de l'espace.* Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 503 bis 507 (1933).

Godeaux, Lucien: *Sur certaines surfaces algébriques irrégulières.* Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 674—680 (1933).

Soit L une courbe algébrique non hyperelliptique, transformée en soi-même par une transformation birationnelle cyclique, d'ordre p premier > 2 ; celle-ci génère une involution, qu'on suppose dépourvue de points unis, de genre $\pi > 0$ et non hyperelliptique. L'a. étudie la surface représentant les couples de points non ordonnés de L , surface qui contient une involution cyclique d'ordre p sans points unis, et l'image Φ de cette involution; il montre que la surface Φ a l'irrégularité π , et obtient sur celle-ci, d'une façon simple, le système continu complet (formé de ∞^π systèmes linéaires) comprenant le système canonique. *Segre* (Bologna).

Seiple, J. G.: *On composite surfaces in higher space.* Proc. Roy. Irish Acad. A 41, 70—93 (1933).

Grundlage und Anfangspunkt dieser Abhandlung sind die von F. Severi gefundenen Formeln, die die Charaktere der irreduziblen Schnittfläche von $r - 2$ Hyperflächen eines Raumes S_r ($r \geq 4$) liefern, und die Relationen, die zwischen den Charakteren zweier Flächen bestehen, falls sie zusammen den vollständigen Durchschnitt von $r - 2$ Hyperflächen bilden [s. F. Severi, Mem. Accad. Torino (2) 52, 61 (1903)]. Verf. betrachtet zunächst zwei Flächen eines Raumes S_4 , die zusammen den vollständigen Durchschnitt von zwei Hyperflächen bilden; aus den Formeln von Severi folgert er die Ausdrücke der Charaktere des zerfallenden Durchschnitts mit denjenigen der beiden Teile. Er schreibt dann ähnliche Relationen im Falle eines aus drei irreduziblen Teilen ψ_1, ψ_2, ψ_3 bestehenden Durchschnitts; dann werden den Charakteren der zusammengesetzten Fläche $\psi_1 + \psi_2$ diejenigen Werte zugewiesen, die, zusammen mit den Charakteren von ψ_3 , die Relationen von Severi befriedigen; man erhält so die Ausdrücke der virtuellen Charaktere einer aus zwei beliebigen Teilen ψ_1, ψ_2 bestehenden Fläche. Es folgen die Ausdehnungen auf eine aus k Teilen bestehenden Durchschnittsfläche in einem beliebigen Raume S_r , und auf eine aus $k - 1$ beliebigen Teilen bestehenden Fläche des S_r . Die Charaktere der zusammengesetzten Flächen,

die ausgerechnet werden, sind: die Ordnung μ_0 , der Rang μ_1 , die Klasse μ_2 , der Typus ν_2 (Anzahl der scheinbaren „pinch-points“), das arithmetische Geschlecht p_a und die Invariante ω . Der Ausdruck von ω führt zu einer Erklärung des kanonischen Kurvensystems für eine zusammengesetzte Fläche. Viele Beispiele, und schließlich einige induktive Bemerkungen über die Enveloppe einer zerfallenden Fläche. *Togliatti*.

Differentialgeometrie:

Kanitani, Jôyô: Sur les repères mobiles attachés à une courbe gauche. Mem. Ryojun Coll. Engrg. 6, 91—113 (1933).

Eine Raumkurve werde auf ein (schiefwinkliges) begleitendes Dreikant bezogen, dessen erste Achse in die Tangente und dessen zweite Achse in die Schmiegeebene fällt. Bei geeigneter Normierung lauten die Kurvengleichungen in allen Punkten, die keine Wendepunkte sind,

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x_1^n, \quad x_3 = \frac{1}{6} x_1^3 + \sum_{n=4}^{\infty} b_n x_1^n.$$

Die vorliegende Arbeit behandelt solche Koordinatensysteme, für die $a_3 = a_4 = b_4 = b_5 = 0$. Es werden die Transformationen dieser Systeme abgeleitet, die geometrische Bedeutung der ersten Koeffizienten untersucht und die Betrachtung speziell auf kubische Raumkurven angewandt.

Willy Feller (Kopenhagen).

Simonart, Fernand: Sur les surfaces *D*. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 401 bis 414 (1933).

Vgl. dies. Zbl. 6, 325. Es handelt sich um Flächen, auf denen ein Orthogonalnetz geodätischer Krümmungskreise liegt. Nachdem das Ergebnis der erwähnten Arbeit des Verf. ausführlicher reproduziert ist, werden hauptsächlich derartige Netze auf Flächen konstanter Gaußscher Krümmung diskutiert. Zum Schluß werden als Verallgemeinerung die Flächen ins Auge gefaßt, die ein Tschebyscheffnetz konstanten Schnittwinkels tragen. Es zeigt sich, daß die geodätische Krümmung der Kurven eines solchen Netzes eine Relation erfüllt, die als Spezialfall auf die Kurven der *D*-Netze zurückführt.

Cohn-Vossen (Locarno).

Simonart, Fernand: Sur le rôle des opérateurs généralisés de Beltrami dans l'étude d'un système différentiel linéaire associé à une surface. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 630—640 (1933).

Le système en question est de la forme: $\sum x_u X_u = P$, $\sum x_v X_v = Q$, $\sum a X_u = R$, $\sum x_u X_v = P'$ etc. où X, Y, Z sont des fonctions inconnues, x, y, z — les coordonnées courantes d'un point d'une surface S , a, b, c — les cosinus directeurs de sa normale et P, P' etc. des fonctions données. E, F, G étant les coefficients de l'élément linéaire de S , l'auteur introduit les opérateurs $\Delta_1(B, C) \cdot (EG - F^2) = EC^2 - 2FBC + GB^2$, $\Delta(B, C; \theta) \cdot (EG - F^2) = EC\theta_v - F(C\theta_u + B\theta_v) + GB\theta_u$ qui lui permettent de résoudre le système cité $X_u = \Delta(P, Q; x) + aR$ etc. L'examen des conditions d'intégrabilité. L'application à l'étude de la déformation infiniment petite d'une surface et au problème de M. Vincisini (ce. Zbl. 3, 363).

S. Finikoff (Moscou).

Haimovici, M., et I. Popa: La correspondance par plans tangents parallèles. Ann. Sci. Univ. Jassy 18, 215—233 (1933).

Ausführliche Darstellung zu einer schon früher gegebenen Inhaltsübersicht. Vgl. dies. Zbl. 5, 179.

Cohn-Vossen (Locarno).

Demoulin, A.: Sur les transformations *R* et *T'*. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 879 bis 881 (1933).

Si deux points m et M se correspondent dans une transformation ponctuelle d'un espace euclidien à n dimensions en soi-même, il y a en général n directions d'_1, d'_2, \dots, d'_n sortant de m , qui coupent les directions homologues (sortant de M), en des points appartenant à l'hyperplan médiateur du segment mM . L'a. dit que la transformation est *R*, lorsque les droites d'_1, d'_2, \dots, d'_n sont toujours deux à deux orthogonales; et associe opportunément à une transformation *R* une transformation *C* [pour laquelle

v. A. Demoulin, C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 594 (ce Zbl. **7**, 256)], qui change le point m dans un point P de la droite mM . Le point M alors, correspond à P dans une inversion de pôle m , qui a une certaine puissance $-2e^{-\varphi}$; et la transformation R initialement considérée est nommée une transformation T'_1 , lorsqu'on a $2-n-\Delta_2\varphi/\Delta\varphi=0$.

— Pour la transformation \bar{T}_1 (loc. cit.) résulte $\Delta_2\varphi=0$, et, par conséquent, si $n=2$ les transformations \bar{T}_1 , T'_1 sont identiques; donc, si n est >2 , T'_1 est — comme \bar{T}_1 — une extension aux espaces supérieurs de la transformation conforme de première espèce la plus générale. — On obtiendra une autre extension de cette transformation, en établissant une correspondance (forcément imaginaire pour n impair) entre deux points m, M , telle que les n droites d_1, d_2, \dots, d_n (loc. cit.) soient isotropes.

Beniamino Segre (Bologna).

Demoulin, A.: Sur deux transformations des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux ou trois points caractéristiques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 479 bis 502 u. 579—592 (1933).

On sait comment, d'après F. Klein, les droites de E_3 peuvent être représentées avec les points d'une hypersphère Σ_4 de E_5 ; l'a. commence par étudier la projection stéréographique d'une hypersphère Σ_n de E_{n+1} sur E_n , ce qui lui fournit (pour $n=4$) une représentation des droites de E_3 avec les points de E_4 . Après il considère les images sur E_4 et sur Σ_4 des ∞^3 droites tangentés à une surface assignée de E_3 (la deuxième représentation est bien connue: v. p. ex. G. Tzitzeica, Géométrie diff. proj. des réseaux, p. 257. Paris: Gauthier-Villars 1924), et applique les résultats auxquels il parvient à l'étude des surfaces S dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques [surfaces dont il a précédemment prouvé l'existence (v. C. R. Acad. Sci., Paris, 1908, 1924)]. — L'a. obtient par cette voie resp. dans E_4 ou dans E_5 un réseau à invariants égaux se reproduisant après six transformations de Laplace, et plusieurs configurations intéressantes (en partie déjà envisagées par G. Tzitzeica, op. cit., chap. XIV), dont il fait l'étude détaillée. — Au moyen d'une nouvelle transformation d'un réseau à invariants égaux dans un réseau parallèle encore à invariants égaux, et d'une autre transformation basée sur la transformation de Koenigs et sur la théorie de l'a. relative aux équations de Moutard à solutions quadratiques, il dérive des configurations indiquées d'autres configurations semblables; ce qui, interprété dans E_3 , le conduit à deux transformations des surfaces S en surfaces S , jouissant de propriétés remarquables. — Un procédé analogue lui permet de donner aussi deux transformations des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques. Segre.

Demoulin, A.: Sur les congruences de sphères dont la courbure est égale à un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 877—880 (1933).

Une sphère S dépendant de deux paramètres u, v décrit une congruence C , dont l'élément angulaire $d\varphi$ est l'angle de deux sphères S infiniment voisines. Si l'on désigne avec ds l'élément linéaire de la surface lieu des centres des sphères S et avec $R=R(u, v)$ leur rayon, on obtient pour le carré de $d\varphi$ une forme quadratique en du, dv : $d\varphi^2 = \frac{ds^2 - dR^2}{R^2}$; la courbure de cette forme en correspondance aux valeurs u, v des paramètres, est dite la courbure de la congruence C relative à la sphère S . — La courbure d'une congruence de sphères ne change pas si l'on soumet la congruence à une inversion. Si les sphères d'une congruence C ont rayon constant, pour que C soit à courbure constante il faut et il suffit que la surface des centres soit à courbure constante. — Si l'on déforme une congruence quelconque en conservant le rayon de ses sphères et de façon que la nouvelle surface des centres soit rapportée à l'ancienne dans une applicabilité, la courbure de la congruence ne change pas. On obtient la plus générale congruence de sphères de courbure constamment égale à un, en déformant de la façon sousdite une congruence de sphères arbitraire, dont toutes les sphères aient en commun un point fixe. Segre (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur les conditions pour que les directrices de Wilczynski d'une surface forment des congruences W . Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 774—781 (1932).

Wenn die Geradenkongruenz der (i) -ten Wilczynskischen Direktrix aus den asymptotischen Tangenten einer Fläche $F_{(i)}$ besteht, so gilt dasselbe von der Geradenkongruenz der (k) -ten Wilczynskischen Direktrix. ($i \neq k = 1, 2$.) (Vgl. die Arbeit des Verf. im Bull. Acad. Roy. Belg. 1928, 335—345.) Somit bietet sich von selbst die Frage an, wann diese Kongruenzen überhaupt W -Kongruenzen werden? Der Autor gibt dafür die notwendige und hinreichende Bedingung an und findet dabei auch die Gleichungen der Flächen $F_{(1)}$, $F_{(2)}$. Die Resultate werden abgeleitet auch für den Fall, daß die ursprüngliche Fläche eine isothermisch-konjugierte ist. Die Beweisführung beruht darauf, daß die asymptotischen Tangenten der ursprünglichen Fläche einer Laplaceschen Folge angehören, in welcher jedes Glied „das transformierte“ des vorangehenden ist.

Hlavatý (Praha).

Terracini, Alessandro: Su alcuni elementi lineari proiettivi. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 401—428 (1933).

L'idée directrice du mémoire est l'introduction des formes invariantes, d'une variété V par une voie géométrique en associant à l'élément générateur P de V et à son voisinage J l'élément voisin P^* et son voisinage J^* . Applications: 1° L'élément linéaire projectif θ d'une congruence Γ (autre que celui de M. Fubini) est le terme principal du birapport $(F, \bar{F}, \pi^*, \bar{\pi}^*)$ des deux foyers F, \bar{F} d'un rayon g et des points où il perse les plans focaux $\pi^*, \bar{\pi}^*$ du rayon voisin g^* . C'est le quotient du produit de deux formes s'annulant aux asymptotiques des deux nappes focales, par la forme quadratique qui détermine les développables de Γ . La conservation de θ est la condition nécessaire et suffisante de l'applicabilité projective de deux congruences. — 2° La figure complexe M composée de la surface S et de la congruence Γ dont les rayons g passent par les points P de S , détermine deux formes: l'élément linéaire θ (= le birapport des points où le rayon g^* perse la surface S , le plan tangent π de S en P et les deux plans focaux de g = la seconde forme normalisée de S) et la forme quadratique H (= le birapport des plans qui projettent de la droite PP^* les rayons g, g^* et les tangentes asymptotiques de S en P) qui détermine les développables de Γ . La conservation de θ détermine une applicabilité de deux figures M et M' ; celle de θ et de H l'applicabilité totale. Si M et M' contiennent la même surface S , les congruences Γ, Γ' sont dites associées. La congruence Γ associable de S dépend d'une fonction de deux arguments. Γ donnée il existe un faisceau de congruences associées Γ' dont les foyers homologues sont alignés et les plans focaux composent des faisceaux. Plusieurs propriétés particulières intéressantes des congruences associées.

S. Finikoff (Moscou).

Terracini, A.: Sulle congruenze associate rispetto a una superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 93—97 (1933).

En généralisant la définition de la transformation T de congruences de droites (Finikoff, ce Zbl. 6, 79), l'auteur appelle une transformation T_0 la relation entre deux congruences K, K' , quand un couple de foyers homologues de chaque rayon est lié par la droite qui touche les deux nappes focales. Il démontre que la transformation T_0 des congruences simplement stratifiables coïncide avec la correspondance entre la congruence engendrée par la droite—lieu de foyers homologues et celle de l'axe du faisceau des plans focaux correspondants d'un faisceau de congruences associées (voir le mémoire précédent).

S. Finikoff (Moscou).

Bortolotti, Enea: Connessioni nelle varietà luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 3, 81—89 (1933).

In einem nichtgekrümmten n -dimensionalen Raume denkt man sich eine m -fache Familie Y_m^p von p -dimensionalen (nichtgekrümmten) Unterräumen X_p . Jedem X_p wird ein anderer X_{n-p-1} zugeordnet, der mit X_p keinen gemeinsamen Punkt hat. Diese X_{n-p-1} bilden eine Y_m^{n-p-1} . Die Projektion des zum X_p infinitesimal benachbarten

Unterraume auf X_p vom zugehörigen X_{n-p-1} aus gibt Anlaß zu einer Art der „Konnexion“ (Cartanscher Gedankenkreis). Eine analoge Operation für Y_m^{n-p-1} mittels Y_m^p gibt Anlaß zu einer anderen Konnexion. Die analytische Behandlung erzwingt noch einen neuen Begriff der „uneigentlichen“ (improprio) Größe, deren kovariante Ableitung mittels eines Systems A_i beherrscht wird. Im einfachsten Falle $n = 3$, $p = 1$, $m = 2$ handelt es sich um eine Geradenkongruenz, die vom Verf. im euklidischen Raume behandelt wird. (Die Y_m^{n-p-1} besteht dann aus uneigentlichen Geraden, von welchen jede zur entsprechenden Kongruenzgerade orthogonal ist.) Es zeigt sich, daß die obenerwähnte Projektion, mittels $du^r V_r w = du^r \left(\frac{\partial w}{\partial u^r} + A_r \right) = 0$ beschrieben wird, wenn der uneigentliche Skalar w die Entfernung des laufenden Punktes Q der Kongruenzgerade von ihrem Punkte der Ausgangsfläche $P(u^1, u^2)$ ist. Die Gleichung $\frac{\partial A_r}{\partial u^s} = \frac{\partial A_s}{\partial u^r}$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Normalkongruenz. — Es wird kurz auch die zweite Konnexion behandelt. *Hlavatý* (Praha).

Davies, E. T.: On the infinitesimal deformations of a space. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 12, 145—151 (1933).

The author deduces the formulae for the “Lie derivation” of an affinor, i. e. the generalization of Lie’s symbol Xf , if in stead of the scalar f an affinorfield is taken [Comp. W. Slebodzinsky, Sur les équations canoniques de Hamilton. *Bull. Ac. Roy. de Belgique* (5) 17, 864—870 (1931)]. Also the formulae for the derivation of an affine connexion and $f S_{\lambda\mu}^{\dots}$ and $R_{\gamma\mu\lambda}^{\dots}$ are deduced. The results are used to gain the formula of Levi-Civita for the “écart géodésique”. [The same question has been treated more extensively almost simultaneously by J. A. Schouten and E. R. van Kampen, Beiträge zur Theorie der Deformation, *Prace mat. fiz.* 41, 1—19 (1933).]

D. van Dantzig (Delft).

Racah, G.: Numero dei tensori isotropi e emisotropi in spazi a più dimensioni. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 18, 135—139 (1933).

„Isotrope Tensoren“ sind solche, deren Komponenten bei einer Drehung einzeln invariant bleiben. In einer früheren Arbeit [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend.* 17, 386 (1933); dies. Zbl. 6, 421] hatte der Verf. mit Hilfe von Gruppencharakteren die Anzahl der isotropen Tensoren des euklidischen S_3 bestimmt. Hier wird mit derselben Methode die Anzahl der isotropen Tensoren des S_n errechnet. Auch wird berechnet, wie viele dieser Tensoren ihren isotropen Charakter auch bei orthogonalen Subst. von der Determinante -1 bewahren.

van der Waerden (Leipzig).

Kawaguchi, Akitsugu, und Tōyomon Hosokawa: Über die geodätische Torsion in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. *Tōhoku Math. J.* 37, 340—346 (1933).

T. Hayashi hat im *Science Reports Tōhoku Imperial University* 4 (1915) die Flächenkurven studiert, entlang deren die geodätische Torsion (d. h. die Torsion der berührenden geodätischen Linie) einen extremen Wert erhält. Die Krümmung der Normalschnitte in der Richtung der Torsionslinien ist gleich der halben mittleren Krümmung der Fläche. — Dieses Resultat wird jetzt auf eine $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit V_{n-1} in einer Riemannschen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit V_n erweitert. Dazu wird eine Ableitung der Frenelschen Formeln einer Kurve der V_{n-1} mit Rücksicht auf die V_n gegeben und daraus werden einige Ausdrücke für die erweiterte geodätische Torsion in Determinantenform abgeleitet. Für $n = 3$ gehen daraus wieder die Hayashischen Resultate hervor.

Struik (Cambridge).

Rowe, C. H.: Characteristic properties of certain systems of paths in a Riemannian space. *Proc. Roy. Irish Acad. A* 41, 102—110 (1933).

In a Riemannian space $V_n(ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j)$ a quadratic system of paths is given by the differential equations (see a previous paper, this Zbl. 7, 257)

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial s} + T_{jk}^{\dots i} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0; \quad \dot{x}^h = \frac{dx^h}{ds}$$

(s is the length of the arc; $\delta/\delta s$ denotes the covariant differentiation along the curve with respect to the arc). If there exist a vector-field f^i , such that the curvature vector of any curve of a system of paths is equal to the component of f^i normal to the curve, this system is called a velocity system (a particular class of quadratic systems). If f^i is a gradient, the system is called a natural system and it is shown, that the paths are the extremals of an integral $\int \mu(x^h) ds$. The curves of a system passing through a point P in the directions of a linear vector-space of m dimensions generate a V_m ; these V_m 's are called associated with P . The author studies the necessary and sufficient relations between the mean curvature vectors of these V_m 's in P that the system should be a velocity one. It is shown that for a velocity system every V_{n-1} associated with P has an umbilic there and therefore $\frac{\delta \xi^i}{\delta s} = -\kappa \lambda^i$ (ξ^i is the unit normal vector of the V_{n-1} ; κ is the normal curvature of the curves on V_{n-1}). From this follows that a necessary and sufficient condition that the system should be a natural one is that the V_{n-1} 's with stationary normal curvature in P should be orthogonal. *J. Haantjes.*

Whitehead, J. H. C.: Convex regions in the geometry of paths. Addendum. Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 226—227 (1933).

In einer früheren Mitteilung (vgl. dies. Zbl. 4, 131) hat der Verf. die Existenz von Bereichen bewiesen, die in bezug auf Bahnkurven konvex sind. Dabei waren die Bahnkurven durch Differentialgleichungen der Gestalt $\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx_j}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0$ mit Ortsfunktionen Γ_{jk}^i gegeben. Hier wird bemerkt, daß sich der Beweis mit geringen Änderungen auf den allgemeinen Fall der durch $\frac{d^2 x_i}{ds^2} + H^i(x_v, \frac{dx_v}{ds}) = 0$ gegebenen Bahnkurven übertragen läßt, wo die H^i beliebige positiv homogene Funktionen zweiten Grades der $\frac{dx_v}{ds}$ sind. Damit werden dann auch die Finslerschen Räume umfaßt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Topologie:

Heesch, H.: Über Kugelteilung. Comment. math. helv. 6, 144—153 (1933).

Das Problem der Kugelteilung wird vom rein topologischen Standpunkte aus behandelt. Neben allgemeinen Betrachtungen wird der spezielle Fall von Teilungen betrachtet, bei welchen die Gruppe aller topologischen Abbildungen jede Teilmenge in jede andere überzuführen gestattet. Wenn eine Teilfläche (Polygon) der Teilung n Kanten hat, so ergibt Division der Eulerschen Polyedergleichung ($e - k + f = 2 - h$) durch die Teilflächenanzahl f die notwendige Bedingung

$$\sum_{s=1}^n \frac{1}{i_s} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{2-h}{f}.$$

i_s bedeutet die Anzahl von Flächen, die in einer Ecke E_s zusammenstoßen. Die Lösungen dieser diophantischen Gleichung werden für die Fälle $h = 0$ (Kugel) und $h = 1$ (projektive Ebene) diskutiert. Nicht alle Lösungen entsprechen Teilungen. Zur weiteren Ausübung werden noch zwei andere Bedingungen benutzt. *F. Laves.*

Flores: Über die Existenz n -dimensionaler Komplexe, die nicht in den R_{2n} topologisch einbettbar sind. Erg. math. Kolloqu. H. 5, 17—24 (1933).

Konstruktion eines n -dimensionalen Komplexes, welcher nicht in den R_{2n} topologisch eingebettet werden kann. Im wesentlichen dieselbe Konstruktion wurde von van Kampen in Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 9, 72—78 (1932) (dies. Zbl. 5, 26) und (mit nur skizziertem Beweis) noch früher in den Handelingen van het XXIII Nederlandsch Natuur-en Geneeskundig Congres, Delft, April 1931 angegeben. *Alexandroff.*

Robinson, Selby: Axiom C of Hausdorff and the property of Borel-Lebesgue. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 595—600 (1933).

The topological axiom C of Hausdorff is equivalent to the following property: the interior of every set is open. In a general topological space (P, K) , the following

three set functions have been considered by Chittenden: $V(E)$, the set of all points p such that every neighborhood of p contains a point of $E - p$; $O(E)$, the set of all points p such that every open set containing p contains a point of $E - p$; $H(E)$, the set of all points p such that every set to which p is interior contains a point of $E - p$ as an interior point. The equivalence of any two of these set functions (and therefore of all) is a necessary and sufficient condition for the presence of the property C . If for each point p of the space P there is a set U_p to which p is interior and such that every proper covering of P is reducible to a finite proper covering of U_p , if a point p which is interior to any two sets is interior to their product, and if any two points are interior to sets which are disjoint, then property C is present. The article concludes with several similar theorems regarding the conditions for the reducibility of a variety of types of covering of a subset E of P . Chittenden (Iowa).

Birkhoff, Garrett: Axiomatic definitions of perfectly separable metric spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, 601—607 (1933).

Because of the importance of perfectly separable metric spaces the author presents axioms for their definition in terms of neighborhood, distance, and convergent sequence. The principal result is presented in the following theorem. The following convergence axioms determine which topological spaces are perfectly separable metric spaces: (A') x is a limit point, K -point, of S if and only if there is a subsequence of S which converges to x ; (B) if a sequence converges to x and to y , $x = y$; (C) let x_i^j converge to x_i for every i , then x_i^j converges to x if and only if $N(i)$ exists so large that $j(i)$ greater than $N(i)$ implies $x_{j(i)}^i$ converges to x ; (D) there exists an enumerable family of open sets of which any open set is the sum of a subclass. Here an open set is defined to be a set S , such that if x belongs to S , then no sequence contained in the complement of S converges to x . Chittenden (Iowa).

Roberts, J. H.: Concerning compact continua in certain spaces of R. L. Moore. *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, 615—621 (1933).

If S is a space in which Axioms 1—5 of R. L. Moore, *Foundations of Point Set Theory*, Colloquium Publications of the American Mathematical Society, Vol. XIII, hold true and M is a closed and compact subset of S , then M is homeomorphic to a subset of a sphere. If M is a proper subset of S , it is homeomorphic to a subset of a plane. If M is a compact continuum and a proper subset of S , there is a compact continuum M^* in the place which is homeomorphic to M . If Axiom 5', if P is a point of a domain D there exists a simple domain E containing P and lying in D , holds, so does Axiom 5, and the system 1, 3, 4, 5' is stronger than the system 1—5. In this case, any completely separable subset M of S is homeomorphic to a subset of the sphere, and if M is a proper subset of S , it is homeomorphic to a subset of a plane. There exists a metric space S in which Axioms 1, 3, 4, 5' hold true which is not completely separable. Chittenden (Iowa).

Kondô, Motokichi: A problem of the metrisation in Hausdorff's topological spaces. *Tôhoku Math. J.* **37**, 383—391 (1933).

Es seien gegeben: ein Hausdorffscher topologischer Raum R und eine Gruppe G von topologischen Abbildungen von R auf sich, die Elemente von G seien mit f bezeichnet. Es wird gefragt nach den Bedingungen dafür, daß man in R eine Entfernungsfunktion (eine Metrik) so einführen kann, daß in dem dadurch gewonnenen metrischen Raum die Abbildungen der Gruppe G zu isometrischen Abbildungen werden. Die gewünschte Bedingung (die zugleich notwendig und hinreichend ist) lautet: zu jedem Punkt x von R und zu jeder Umgebung $U(x)$ dieses Punktes gibt es eine Überdeckung Π des Raumes R solcher Art, daß, wenn V irgendein Element von Π ist, dessen Bild fV (bei einer Abbildung f aus G) mit dem dem Punkte x zugeordneten Element $U(x, \Pi)$ von Π gemeinsame Punkte hat, notwendig $U(x) \supset fV$ ist. Unter einer Überdeckung Π wird dabei ein System offener Mengen verstanden, wobei vorausgesetzt wird, daß die Vereinigungsmenge der Elemente von Π den ganzen Raum ausfüllt und daß unter

den Elementen von Π , die einen gegebenen Punkt x enthalten, ein bestimmtes, als $U(x, \Pi)$ dem Punkte x zugeordnet ist. — Die Notwendigkeit der Bedingung liegt auf der Hand: sind in einem metrischen Raume x und $U(x)$ gegeben, so bestimme man ε so, daß die ε -Umgebung $U(x, \varepsilon)$ von x in $U(x)$ liegt und definiere Π als das System der ε -Umgebungen sämtlicher Punkte von R .

Um zu beweisen, daß die Bedingung hinreichend ist, wird sie zuerst in eine andere Form gebracht. Diese abgeänderte Form besteht darin, daß die Existenz einer monotonen und vollständigen Überdeckungsfolge verlangt wird. Die erste Eigenschaft ist analog, die zweite identisch mit den entsprechenden Bedingungen im allgemeinen Metrisationssatz von Alexandroff-Urysohn [C. R. Acad. Sci. Paris **177**, 1274 (1923)]. Der Beweis hat viele Berührungspunkte mit Urysohn [Math. Ann. **92**, 275–293 (1924)]. Diese Zusammenhänge (bis in die Bezeichnungen) scheinen dem Verfasser unbekannt geblieben zu sein.

P. Alexandroff (Moskau).

Čech: Eine Verallgemeinerung des Jordan-Brouwerschen Satzes. Erg. math. Kolloqu. H. 5, 29–31 (1933).

Der Alexandersche Dualitätssatz gilt bekanntlich für Homologie-Mannigfaltigkeiten mit verschwindenden Bettischen Zahlen [vgl. Pontrjagin, Math. Ann. **105**, 165–205 (1931); dies. Zbl. **2**, 291]. Verf. zeigt nun, daß man im nulldimensionalen Falle (also im Falle der Zerlegung, welcher seinerseits den Jordan-Brouwerschen Satz als Spezialfall enthält) die Mannigfaltigkeitsvoraussetzung durch die schwächere Voraussetzung, der Raum sei eine Pseudomannigfaltigkeit mit verschwindender $(n-1)$ -ter Bettischer Zahl, ersetzen kann. Verf. weist auch auf weitere von ihm erbrachte Verallgemeinerungen hin.

P. Alexandroff (Moskau).

Cartan, Henri: Sur les transformations localement topologiques. Acta Litt. Sci. Szeged **6**, 85–104 (1933).

Im ersten Teil der Arbeit wird in naheliegender Weise der Begriff einer „lokal-topologischen“ Abbildung für (auch offene) topologische Mannigfaltigkeiten eingeführt, sowie die damit eng zusammenhängenden Begriffe der Fortsetzung (der umgekehrten Abbildung) längs einer Kurve, der Überlagerung usw. Die Fortsetzungsmöglichkeit längs einer beliebigen Kurve ist charakteristisch für die Überlagerung. Verf. stellt Bedingungen auf, welche hinreichend sind dafür, daß eine gewisse lokal-topologische Abbildung eineindeutig ist und gibt in diesem Zusammenhange insbesondere einen sehr einfachen Beweis eines bekannten Hadamardschen Satzes [Hadamard, Sur les transformations ponctuelles, Bull. Soc. Math. France **34**, 71–81 (1906).] — Im zweiten Teil werden lokal-topologische Abbildungen in den R^n untersucht und im wesentlichen Abbildungsgradbetrachtungen angestellt. Liegt allgemein eine lokal-topologische Abbildung f einer (evtl. offenen) M^n in eine M_1^n vor, so spricht Verf. (bereits im ersten Teil) von einer Domäne in M_1^n als einem (als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Riemannschen Flächen leicht zu definierenden) topologischen Raum. Es werden jetzt die Domänen R^n untersucht und dabei insbesondere die Fälle der Einblättrigkeit (univalence) betont. Es können natürlich auch die lokal-topologischen Abbildungen einer Domäne in eine andere betrachtet werden (Verf. spricht dann vom Ineinanderliegen von Domänen — un domaine D_1 intérieur à un domaine D —, im Falle der Einblättrigkeit von Teildomänen. Das Théorème fondamental des Verf. kann als sehr weitgehende Verallgemeinerung des folgenden Brouwerschen Satzes betrachtet werden: wird bei einer Deformation eines Würfels $W^n \subset R^n$ ein Punkt $p \subset R^n$ vom Würfelrande nicht berührt, so ändert sich seine Bedeckungszahl nicht. Das Théorème fondamental lautet in der Tat: Es sei D eine Domäne (im R^n), D_1 eine Teildomäne von D , t eine lokal-topologische Abbildung von D in eine Domäne D' ; dabei wird vorausgesetzt, daß D_1 eine (im leicht präzisierbarem Sinne) vollständig im Inneren von D liegende Teildomäne ist und daß in $D-D_1$ die Abbildung t_1 sich stetig aus der Identität erzeugen läßt (also als Resultat einer Deformation aufgefaßt werden kann). Wird im Laufe dieser Deformation ein Punkt p von R^n durch das jeweilige Bild von $D-D_1$ nicht berührt, so ist die Bedeckungszahl von D und D' im Punkte p dieselbe. Diesen

Satz wendet der Verf. auf den Beweis verschiedener anderer Sätze an, von denen die einen Univalenzbedingungen, die anderen Konvergenzeigenschaften von Folgen lokal-topologischer Abbildungen (von Domänen) aufstellen. *P. Alexandroff (Moskau).*

Mechanik.

Akimoff, M.: Sur un problème de mécanique. Appl. Math. a. Mech. 1, 56—59 u. franz. Zusammenfassung 59—60 (1933) [Russisch].

Verf. stellt sich die Aufgabe, die allgemeine Gestalt der Flächen aufzufinden, auf denen Bewegungen von materiellen Punkten längs Schraubenlinien mit vertikaler Achse unter Berücksichtigung der Reibungskräfte möglich sind. Der reibungslose Fall wurde von Catalan (J. Math. pures appl., I. s. 11, 212) untersucht. Die Aufgabe ist für die Theorie der Spiralseparatoren von Interesse. *A. Andronow u. A. Witt.*

Kryloff, N., et N. Bogoliubov: Problèmes fondamentaux de la „mécanique non linéaire“. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 4, 475—498 (1933) [Russisch].

Verff. geben eine Übersicht über die Methoden zur Untersuchung der Bewegungen von Autoschwingungssystemen mit einem Freiheitsgrad ohne und unter Einwirkung von periodischen Kräften. Die Bewegungsgleichungen werden in symbolischer Form geschrieben; als einfachstes Beispiel einer solchen symbolischen Gleichung sei die folgende genannt: $e = R_{\omega} v. T. f(E + e) (16)$, wo e die gesuchte Größe (Spannung), E eine periodische Zeitfunktion, R_{ω} der Impedenzoperator ist, der in den praktisch wichtigsten Fällen eine rationale Funktion von $j\omega$ ist ($j\omega = \frac{d}{dt}$); v. T. bedeutet „veränderlicher Teil“ im Sinne der Fourierentwicklung. Es wird ohne Beweis der folgende Satz erläutert: „Die stationären Lösungen der Gl. (16) sind quasiperiodisch mit zwei fundamentalen Perioden, von denen eine mit der der äußeren Kraft zusammenfällt; als Grenzfall solcher quasiperiodischer Lösungen sind die rein periodischen mit der Periode der äußeren Kraft zu betrachten; alle anderen Bewegungen sind asymptotisch quasiperiodisch.“ Es werden Methoden zur Berechnung der quasiperiodischen und auch der asymptotisch quasiperiodischen Bewegungen gegeben; es werden die Frequenzkorrekturen berechnet und die Stabilität untersucht. Nur die Resultate sind mitgeteilt. Es werden verschiedene quasiperiodische und periodische Betriebszustände untersucht. Am Anfang der Arbeit wird eine historische Übersicht gegeben. *A. Andronow u. A. Witt.*

Lanezos, Cornel: Zur Hamiltonschen Dynamik des Funktionenraumes. Z. Physik 85, 107—127 (1933).

This paper gives a developed and improved form of the author's earlier theory (cf. this Zbl. 6, 330), in which he interpreted Dirac's equations as the self-adjoint Hamiltonian canonical equations of motion of a dynamical problem in function-space. He now regards the positional- and momentum-coordinates of the dynamical problem as complex variables, the Hamiltonian function being a real Hermitean quadratic form. The two sets of conjugate Hamiltonian equations are reduced to a single complex equation. The Fourier-analysis used is represented as a canonical transformation, so that canonical transformations are the only processes used. The system of equations obtained is automatically self-adjoint, and the doubling of the Dirac's equations, which was found in the earlier paper, is avoided. The connexion with the Principle of Action and the transformation-properties of the ψ -quantities are then investigated.

Whittaker (Edinburgh).

Birkhoff, G. D., and D. C. Lewis jr.: On the periodic motions near a given periodic motion of a dynamical system. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 12, 117—133 (1933).

Reduziert man ein konservatives kanonisches System σ mit $n + 1$ Freiheitsgraden in der Nähe einer periodischen Lösung mittels des Energieintegrals auf ein kanonisches nicht-konservatives System ϱ mit n Freiheitsgraden, dessen Hamiltonsche Funktion

$H = H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}; t)$ in bezug auf t nach 2π periodisch ist, so kann das Problem benachbarter isoenergetischer periodischer Lösungen auch im Falle $n > 1$ auf die Betrachtung von „Flächentransformationen“ zurückgeführt werden (bzgl. des „allgemeinen stabilen Falles“ mit $n = 1$ vgl. G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, New York (1927), S. 150—162 auch 215—218). Zunächst ist $x_j^{(0)} \rightarrow x_j^{(m)}$ ($j = 1, \dots, 2n$), wobei $x_j^{(m)}$ den zu $t = 2\pi m$ gehörigen Wert einer Lösung von ϱ , also $x_j^{(0)}$ ihren Anfangswert bezeichnet, eine Punkttransformation $T^{(m)} = (T)^m$ ($T = T^{(1)}$; $m = 1, 2, \dots$)

derart, daß $\sum_{i=1}^n (x_{n+i}^{(m)} dx_i^{(m)} - x_i^{(m)} dx_{n+i}^{(m)} - x_{n+i}^{(0)} dx_i^{(0)} + x_i^{(0)} dx_{n+i}^{(0)})$ ein vollständiges Differential dJ ist, das, wenn $u_i = x_i^2 + x_{n+i}^2$, $\vartheta_i = \arctg(x_{n+i}/x_i)$ gesetzt wird,

die Gestalt $dJ = -\sum_{i=1}^n (u_i^{(m)} d\vartheta_i^{(m)} - u_i^{(0)} d\vartheta_i^{(0)})$ annimmt. Existieren daher n ganze

Zahlen k_i derart, daß $\vartheta_i^{(m)} - \vartheta_i^{(0)} = 2\pi k_i$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit B bestimmt, so wird auf dieser $d\vartheta_i^{(m)} = d\vartheta_i^{(0)}$ und $J = J(\vartheta_1^{(0)}, \dots, \vartheta_n^{(0)})$ eine Ortsfunktion auf einem n -dimensionalen Torus. Dies liefert die Existenz von mindestens 2^n Punkten

mit $dJ \equiv \sum_{i=1}^n (u_i^{(m)} - u_i^{(0)}) d\vartheta_i^{(0)} = 0$, d. h. $u_i^{(m)} = u_i^{(0)}$, $\vartheta_i^{(m)} - \vartheta_i^{(0)} = 2\pi k_i$, das sind in-

variante Punkte von T^m , also periodische Lösungen von σ ; vgl. Birkhoffs Note über die mehrdimensionale Verallgemeinerung des letzten Poincaréschen Satzes, C. R. Acad. Sci., Paris **192** (1931); dies. Zbl. **1**, 174. Es wird nun gezeigt, daß in der Nachbarschaft der die gegebene periodische Lösung von σ darstellenden Gleichgewichtslage $u_i = 0$ von ϱ unendlich viele Mannigfaltigkeiten B der verlangten Art vorhanden sind, sofern $u_i = 0$ von dem Birkhoffschen „allgemeinen Typus“ ist. Beim Beweis wird T^m in normierten Polarkoordinaten u_i, ϑ_i derart angesetzt, daß die nicht-linearen Terme der Transformationsformeln in der Nähe von $u_i^{(0)} = 0$ sehr klein sind, wenn man sich in einem Bereich $u_i^{(0)}/u_j^{(0)} > \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$; $i, j = 1, \dots, n$) befindet und m nicht zu groß ist. Die Behandlung der linearen Näherung erfolgt unter Benutzung einer Approximation der auftretenden Irrationalitäten durch Brüche. Der nicht-lineare Fall ergibt sich dann mittels eines Störungsprozesses. Wintner (Baltimore).

Graffi, Dario: Limitazioni dei valori di alcuni invarianti adiabatici con applicazione al problema delle masse variabili. Atti Accad. Sci. Torino **68**, 262—272 (1933).

Nach einer von H. Kneser (Math. Ann. **91**, 155) sowie von dem Verf. (Rend. Accad. Lincei **1932**; dies. Zbl. **5**, 15) angewandten Methode werden im Falle eines kanonischen Systems mit einem Freiheitsgrade für die Bahnkurven direkt aus den Differentialgleichungen Abschätzungen hergeleitet, um den Ansatz der Theorie der adiabatischen Invarianten vom Standpunkt der klassischen Mechanik aus zu rechtfertigen. Wintner (Baltimore).

Graffi, Dario: Limitazioni dei valori di alcuni invarianti adiabatici con applicazione al problema delle masse variabili. II. Atti Accad. Sci. Torino **68**, 459—482 (1933).

Der in der ersten Mitteilung (Atti Accad. Sci. Torino **68**, 262—272; vgl. vorst. Ref.) nur für dynamische Systeme mit einem Freiheitsgrad besprochene Ansatz wird jetzt im Falle der Keplerschen Bewegung mit variabler Masse durchgerechnet.

Wintner (Baltimore).

Kristiansson, K.: Untersuchung einer Klasse in bezug auf die ξ -Achse unsymmetrischer, periodischer Bahnen um beide Massen im problème restreint. Astron. Nachr. **250**, 249—256 (1933).

Lovett, E.-O.: Sur le problème des deux corps de masses variables. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 674—676 (1933).

Zwei Körper ziehen sich mit einer Kraft der Form r^k an, ihre Massen wachsen mit der n -ten Potenz der Zeit. Außer den bekannten, durch Quadraturen lösbaren Fällen gibt es eine Reihe weiterer, die sich nach der Methode der sukzessiven Approximationen integrieren lassen. A. Klose (Berlin).

Placinteau, Ioan I.: Sur les équations des trois corps à masses variables. Ann. Sci. Univ. Jassy 18, 70—71 (1933).

Dans une note antérieure, analysée dans ce journal (ce Zbl. 4, 165), l'auteur a établi le système des équations différentielles pour le mouvement de trois corps à masses variables. Dans la présente note il donne une forme plus symétrique aux équations différentielles, établies dans sa première note. *Kyrille Popoff (Sofia).*

Krall, G.: Sul moto di un sistema planetario di $n + 1$ corpi rigidi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 927—932 (1933).

Krall, G.: Sul moto di un sistema planetario di $(n + 1)$ corpi rigidi. Suoi aspetti limiti stazionari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 1060—1064 (1933).

In einer früheren Untersuchung des Verf. über denselben Gegenstand ist die Wirkung von inneren dissipativen Effekten auf ein gravitierendes System von $n + 1$ Körpern bezüglich des Verhaltens des Endzustandes mittels stationärer Kreislösungen (Lagrange, Andoyer) des $(n + 1)$ -Körperproblems von Massenpunkten charakterisiert worden, und auch über den Endzustand der Präzessionen ergab sich ein einfaches Resultat [G. Krall, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 219—225, 371 bis 376, 664—669 (1932); dies. Zbl. 4, 331—332 und 5, 223]. Doch ist dabei die Gravitationswirkung derart angesetzt worden, als ob die Körper Massenpunkte wären, obwohl andererseits auch kinetische Effekte (Präzession) behandelt worden sind, bei welchen diese Annahme sinnlos wird. In der vorliegenden Untersuchung wird nun diese Annahme auch bezüglich des Gravitationseffektes fallengelassen, indem die erste Näherung zu dem Newtonschen Potential ausgedehnter Körper, die eben ein Potential von Massenpunkten ist, durch die bekannte, die Trägheitsmomente enthaltende zweite Näherung ersetzt wird. Die Behandlung des Problems verläuft dann genau wie a. a. O. und führt zu denselben Resultaten, aber auch zu deren Verschärfung, da mit Rücksicht auf das erwähnte Korrektionsglied in dem Newtonschen Potential jetzt auch die Endlage der Trägheitsellipsoide angebar ist. Was die Endbahnen anlangt, sind sie wieder Kreise bis auf einen Grenzfall, dessen Behandlung angekündigt wird. *Wintner.*

Meyer, G.: Solutions voisines des solutions de Lagrange dans le problème des n corps. Ann. Observ. Bordeaux 17, 77—252 (1933).

Die bekannten Lagrangeschen Lösungen des n -Körperproblems (für den Fall der Newtonschen Attraktionskraft) und die durch Variation daraus zu gewinnenden Lösungen werden nach einer von Andoyer stammenden Methode ausführlich dargestellt. In die Differentialgleichungen der Bewegung wird ein Parameter λ eingeführt, durch den zum Ausdruck gebracht wird, daß bei den eigentlichen Lagrangeschen Lösungen alle späteren Konstellationen des Systems dem Ausgangszustande ähnlich sind. Die an diese relativen Gleichgewichtszustände anschließenden unendlich kleinen Librationsbewegungen und die in einzelnen Fällen auftretenden Limitationsbewegungen werden aufgesucht und diskutiert. Neben anderen Spezialfällen wird besonders der Fall $n = 4$ behandelt unter der weiteren Voraussetzung, daß eine der vier Massen verschwindend klein ist. *A. Klose (Berlin).*

Figur der Himmelskörper:

Markovsky, D.: Approximate ellipsoidal figures of equilibrium of a rotating fluid and their application to gravimetry. Russ. astron. J. 10, 202—235 u. engl. Zusammenfassung 235—239 (1933) [Russisch].

Methods are given in the present paper for determination of $\partial^2 W / \partial z^2$ of the potential of terrestrial attraction in perturbed and unperturbed fields by means of a variometer and partly of pendulum observations. In the case of imperturbed field the determination of $\partial^2 W / \partial z^2$ is based on certain properties of homogenous and non-homogenous figures of equilibrium. In the case of perturbed field the influence of underground masses on the values of second derivatives of the potential on the Earth was determined. *Auszug.*

Klauder, H.: Zur Theorie rotierender Sterne. *Astron. Nachr.* **250**, 89—122 (1933).

The paper gives a connected critical account of the results, for the most part previously known, of the extension of the usual theory of stellar constitution to the case of rotating stars. The subjects treated are: 1. Fundamental equations 2. Surfaces of constant potential, density, pressure, temperature. 3. Mass-luminosity relation. 4. Polytropic index. 5. von Zeipel's Theorem. 6. Convection currents. 7. The law governing the rotation. 8. Mechanical instability. 9. Influence of distribution of energy sources on stability. 10. Influence of dependence of energy generation on temperature and density on stability. It is not possible to summarize the results in a short space, and the paper itself must be consulted for these. *W. H. McCrea.*

Wavre, R.: Sur le mouvement des astres fluides. *Ann. Inst. H. Poincaré* **3**, 491 bis 510 (1933).

Die Arbeit ist ein Vortrag, in dem der Verf. in übersichtlicher Form über seine verschiedenen neueren Untersuchungen berichtet und der als eine Einführung zum Studium seines kürzlich erschienenen Buches *Figures planétaires et géodésie* (dies. Zbl. **5**, 316) dienen kann. Betrachtet werden u. a. Verallgemeinerungen des Stokesschen und des Brunsschen Satzes, die Hohlraummethode (l'artifice de la cavité), die a. a. O. ausführlich dargestellten Untersuchungen über die Möglichkeit einer formalen Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten bzw. schrittweisen Näherungen sowie gewisse Ansätze von Dive. *Wintner* (Baltimore).

Wavre, R.: Sur les polydromies des potentiels newtoniens prolongés et le théorème de Cauchy-Kowalewska. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. **19**, 297—300 (1933).

Crudeli, U.: Sulle velocità angolari degli astri rotanti nella teoria dell'equilibrio relativo. *Rend. Circ. mat. Palermo* **57**, 308—310 (1933).

Die Poincarésche obere Schranke $2\pi\kappa\mu$ (κ = Gravitationskonstante, μ = Maximum der Dichte) für das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω einer Gleichgewichtsfigur ist von dem Verf. [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, V. s. **19 I**, 666—668 und **19 II**, 41—43 (1910)] zu $\pi\kappa\mu$ verschärft worden, scheinbar nur unter der Annahme, daß die Oberfläche S der Gleichgewichtsfigur eine konvexe Fläche ist, in Wirklichkeit aber ohne diese Annahme, sofern nur gewisse, vor allem die Nachbarschaft des Lichtensteinschen Äquators betreffende Regularitätsbedingungen erfüllt sind; vgl. W. Nikliborc, *Math. Z.* **30**, 787—793 (1929). Der Verf. bemerkt jetzt, daß aus den a. a. O. gewonnenen Formeln mit derselben Mühe genauer

$$(0 <) \frac{\omega^2}{\pi\kappa\mu} < 1 - \frac{\gamma C}{2\pi g_*}; \quad C = \int_S^{\cos\varphi} \frac{d\sigma}{r_*^2}$$

abgelesen werden kann. Dabei bezeichnet γ den Minimalwert der Schwerkraft auf S und g_* den Betrag der Schwerkraft in demjenigen Punkte von S , der von dem Äquator maximal entfernt ist, endlich r_* die Entfernung dieses Punktes von dem Flächenelement $d\sigma$. — Die Integralabschätzung, die den Faktor γ von C einführt, ist übrigens nur dann stichhaltig, wenn man einen in der Note nicht erwähnten Satz von Lichtenstein (Berliner Sitzber. **1918**, 1129) wesentlich verwertet. *Wintner* (Baltimore).

Crudeli, Umberto: Su gli astri uniformemente rotanti con particolare riguardo al caso elementare della terra. *Mem. Soc. astron. Ital.*, N. s. **7**, 131—135 (1933).

Der Verf. hat in einer in den *Rend. Circ. mat. Palermo* erschienenen Arbeit eine obere Schranke für die Winkelgeschwindigkeit gewonnen. Die Schranke ist ein Oberflächenintegral. In der vorliegenden Note wird diese Abschätzung mit der Clairautschen Approximationsformel für die Schwere kombiniert und insbesondere auf den Fall der Erde angewandt (eine Abschätzung der Winkelgeschwindigkeit ist dabei mit einer solchen der Dichte verknüpft). (Vgl. vorst. Referat.) *Wintner* (Baltimore).

Crudeli, Umberto: Sul teorema di Stokes per il potenziale all'esterno di un astro. *Determinazione della gravità superficiale.* *Mem. Soc. astron. Ital.*, N. s. **7**, 201—205 (1933).

Die Note hat den Zweck, den Umstand hervorzuheben, daß das sog. Stokessche

Problem (Bestimmung der Schwere auf der Oberfläche) formal durch eine Fredholmsche Integralgleichung beherrscht wird. Diese Gleichung wird hergeleitet und sodann auf einen von R. Wavre (*Figures planétaires et géodésie*, S. 40) betrachteten Fall übertragen, wobei es sich nicht mehr um Gleichgewichtsfiguren im üblichen Sinne handelt.

Wintner (Baltimore).

Pendse, C. G.: Note on the stability of Saturn's rings. *Philos. Mag.*, VII. s. 16, 575 bis 580 (1933).

Maxwell (*Scientific Papers* 1, 288—376) hat seinen Beweis für die Instabilität eines als starr angenommenen Ringes bei dem ebenen Saturnmodell zunächst für den Fall eines beliebigen Ringes von willkürlicher Gestalt gegeben und sodann den Fall einer homogenen Kreislinie als Spezialfall aufgefaßt. In dem allgemeinen Fall handelt es sich um die Instabilität derjenigen Lösungen, die im Sinne der heutigen Terminologie (Routh, Levi-Civita) stationär (steady) sind. Die Instabilität ist im Sinne der Theorie der kleinen Schwingungen zu verstehen. — Der Verf. bemerkt, daß Maxwells stationärer Ansatz im Falle einer homogenen Kreislinie formal illusorisch wird. Es wird aber durch eine einfache direkte Rechnung gezeigt, daß die charakteristischen Exponenten auch diesmal instabil sind.

Wintner (Baltimore).

Quantentheorie.

● Darrow, Karl K.: Elementare Einführung in die Quantenmechanik. Aus d. Engl. übersetzt v. E. Rabinowitsch. (*Neue Probleme d. Physik u. Chem.* Hrsg. v. Eugen Rabinowitsch. Bd. 3.) Leipzig: S. Hirzel 1933. V, 123 S. u. 3 Abb. RM. 6.—.

Sehr einfache, breite und ausführliche Darstellung der Grundbegriffe der Quantenmechanik. Durch Beschränkung auf das Hauptsächliche, unter Auslassung sowohl spezieller Anwendungen als auch aller in mathematischer oder begrifflicher Weise komplizierteren und schwierigeren Dinge, wird für das Gebotene eine Einfachheit und Ausführlichkeit ermöglicht, die das Buch als erste Einführung für jeden Interessierten hervorragend geeignet macht; vielen Lesern, die nicht selber Fachphysiker sind, wird der glücklich abgegrenzte Umfang des Gebotenen auch einen völlig genügenden Wissensstoff vermitteln. Inhalt: I. Materiewellen und stationäre Atomzustände. (Dualismus Wellen-Korpuskeln; Schrödingergleichung; Ungenauigkeitsrelation; physikalische Bedeutung der Wellenfunktion.) II. Quantenmechanik; Emission und Absorption von Licht durch Atome. (Korrespondenzprinzip; Matrizenmechanik; Zusammenhang der Matrizen mit den Schrödingerschen Eigenfunktionen; Übergangswahrscheinlichkeiten.)

P. Jordan (Rostock).

Levi-Civita, Tullio: Some mathematical aspects of the new mechanics. *Bull. Amer. Math. Soc.* 39, 535—563 (1933).

Nach einem Überblick über die Entwicklung und die verschiedenen Formen der Quantenmechanik wird eine neue Wellengleichung, in der eine 4 komponentige Vektorwellenfunktion auftritt, vorgeschlagen, die allgemein-relativistisch invariant ist. Es folgen einige Bemerkungen über den Dualismus im Wellen- und Partikelbild, der seinen mathematischen Ausdruck darin findet, daß eine „normale“ Wellengleichung stets charakteristische Flächen (Wellenfronten) und Bicharakteristiken (Bahnkurven) liefert. Anhangsweise wird noch behandelt 1. die kanonische Form der mechanischen Gleichungen für ein geladenes Teilchen in einer beliebigen Metrik. 2. Die Methoden zur allgemein-relativistischen Verallgemeinerung von Gleichungen, die in einem speziellen Koordinatensystem gegeben sind. 3. Die allgemein-relativistische Verallgemeinerung der de Broglieschen Beziehung zwischen Impuls und Wellenlänge.

Nordheim (Paris).

Korn, Arthur: Mechanische Theorien in der mathematischen Physik. *Tôhoku Math. J.* 37, 392—403 (1933).

Versuch einer mechanischen Deutung von Gravitation, Coulombgesetz und der Schrödingerschen Wellengleichung.

Nordheim (Paris).

Chraplywyj, Zenon W.: On negative energy levels in Dirac's theory. *Acta Physica Polon.* 2, 193—204, engl. Zusammenfassung 193—194 (1933) [Polnisch].

Chraplywyj, Z.: Über das Eigenpotential des Elektrons in der Wellenmechanik. Acta Physica Polon. 2, 205—213, dtsh. Zusammenfassung 205—206 (1933) [Polnisch].

Hull, E. L.: Professor Born's theory of the electron. Rev. sci. Instrum., N. s. 4, 524 (1933).

Referat und Kommentar betreffs der Bornschen vorläufigen Mitteilung über eine neue Theorie des Elektrons. (Vgl. dies. Zbl. 7, 234.) P. Jordan (Rostock).

Fermi, E., e G. E. Uhlenbeck: Sulla ricombinazione di elettroni e positroni. Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. 2, 157—160 (1933).

Nel presente lavoro gli autori discutono la possibilità di spiegare la diffusione anomala dei raggi γ osservata da Gray e Tarrant in base alla ricombinazione di elettroni e positroni rappresentabili con la teoria di Dirac. I risultati teorici non si conciliano con i dati sperimentali. Autoreferat.

Beck, G., und K. Sitte: Zur Theorie des β -Zerfalls. Z. Physik 86, 105—119 (1933).

Theorie des β -Zerfalls unter Bezugnahme auf die Diracsche „Löcher“-Theorie nach einem kürzlich (Z. Physik 83, 498; vgl. dies. Zbl. 7, 137) von Beck vorgeschlagenen Modell. Der Zerfall wird gedanklich in zwei Prozesse zerlegt: A. Der Kern gibt einen definierten Energiebetrag $> 2 mc^2$ ab und hebt damit in seiner Umgebung ein Elektron aus einem Zustand negativer Energie in einen Zustand positiver Energie, d. h. erzeugt ein Paar von Elektronen entgegengesetzter Lochung; der Überschuß der abgegebenen Energie über $2 mc^2$ verteilt sich dabei über die beiden Elektronen nach einer quantenmechanisch berechenbaren Wahrscheinlichkeitsfunktion. B. Das negative Elektron verläßt mit der ihm zugefallenen kinetischen Energie das Atom, das positive wird vom Kern aufgenommen, wobei seine kinetische Energie spurlos verschwindet (Verletzung des Energiesatzes, um die Gleichheit aller Kerne des Anfangs- sowie des Endelements zu ermöglichen). — Die Theorie liefert natürlich ein kontinuierliches β -Spektrum mit scharfer oberer Grenze. Unter bestimmten Annahmen über das Eintreten von Prozeß B lassen sich aus mehreren Möglichkeiten zwei Zerfallstypen auswählen, die den kürzlich von Sargent [Proc. Roy. Soc. London 139, 659 (1933)] am Erfahrungsmaterial festgestellten zwei Typen entsprechen. Das neue Resultat von Ellis und Mott [Proc. Roy. Soc. London 141, 502 (1933)], daß die obere Grenze des β -Spektrums als Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endkern betrachtet werden darf, ist mit der Theorie im Einklang, läßt jedoch ebenso gut Paulis Vermutung der gleichzeitigen Emission eines Elektrons und eines „kleinen Neutrons“ von Elektronenmasse bei strenger Gültigkeit des Energiesatzes zu. C. F. v. Weizsäcker (Kopenhagen).

Sitte, K.: Zur Theorie des β -Zerfalls. (Nach G. Beck und K. Sitte.) (16. Tag. d. Gauver. Thüringen-Sachsen-Schlesien d. Deutsch. Physik. Ges., Freiberg i. Sa., Sitzg. v. 10.—12. VI. 1933.) Physik. Z. 34, 627—630 (1933).

Verf. macht im Anschluß an Beck und eine frühere Arbeit von Beck und ihm selbst (Z. Physik und Proc. Roy. Soc. London [vgl. vorst. Referat]) den Versuch durch Anwendung der Diracschen Theorie die Energieverteilung und Zerfallskonstanten der β -Strahler zu berechnen. Dabei wird angenommen, daß bei einem Gesamtverlust der Kernenergie um einen diskreten Wert ΔE ein positives Elektron entsteht, das in den Kern aufgenommen wird, während ein variabler Anteil der Energie von dem wegfliegenden β -Teilchen mitgenommen wird. Da das Energiespektrum der letzteren bekanntlich kontinuierlich ist, muß in jedem Elementarprozeß ein bestimmter Bruchteil der Energie absolut verschwinden, was bekanntlich dem Energiesatz und der bekannten Form der Diracschen Theorie widerspricht, die daher über ihr eigentliches Gebiet hinaus zur Ableitung der Energieverteilung unter Inkaufnahme der inneren Widersprüche benutzt wird. Wird der Kernradius, bei dem sich die geschilderten Prozesse abspielen als von der Größenordnung der de Broglie-Wellenlängen der β -Teilchen angenommen, so ergeben sich Energieverteilungen, die mit den an β -Strahlern, insbesondere an Ra E gemessenen in qualitativer Übereinstimmung sind, wobei jedoch noch

Konstanten eingehen, über deren Größe wir nichts wissen. Ebenso kann eine qualitative Anordnung der Zerfallskonstanten in Abhängigkeit von der Energie für verschiedene β -Strahler gegeben werden.

Houtermans (Hayes, England).

Shimasaki, Seisaku: On the constitution of atomic nuclei. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 15, 384—399 (1933).

Systematik der Zusammensetzung, der Massendefekte und der mechanischen Momente der bekannten Atomkerne auf Grund der Annahme eines Aufbaus aus α -Teilchen, Neutronen und, im Falle ungerader Ladung, eines Wasserstoffisotops von der Masse 3 (bzw. bei einigen leichten Kernen 2). Einige der gezogenen Konsequenzen, wie die Gültigkeit der Fermi-Statistik für α -Teilchen im Kern und eine Parallelität der Abhängigkeit des Kernaufbaus und des Aufbaus der äußeren Elektronenschalen von der Kernladung, widersprechen den üblichen theoretischen Anschauungen.

C. F. v. Weizsäcker (Kopenhagen).

Barba, Guido: Su speciali nuclei, analoghi a quelli di Andreoli-Evans. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 3, 131—141 (1933).

Verf. betrachtet besondere Typen von Funktionen zweier Veränderlichen in Hinsicht auf die Operation, die nach Volterra Komposition 2. Art heißt und die daraus besteht, aus zwei solchen Funktionen $K(x, y)$, $H(x, y)$ die $\int K(x, s)H(s, y)ds$ zu bilden, wobei das Integral auf ein festes (endliches oder unendliches) Intervall erstreckt wird. Mehrere Resultate über die Bedingungen, damit aus zwei Funktionen eines der betrachteten Typen eine Funktion desselben Typus entsteht, und über die Vertauschbarkeit der zwei Funktionen bei der Komposition werden abgeleitet. Als

Beispiel diene der folgende Satz: aus den Funktionen $\frac{x^a}{y^{a+1}}\mu_1\left(\frac{x^\alpha}{y^\beta}\right)$, $\frac{x^a}{y^{a+1}}\mu_2\left(\frac{x^{\alpha_1}}{y^{\beta_1}}\right)$ ($\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, a$ ganze Zahlen), wenn, für ein gewisses w und beliebiges z , $\mu_1(zw) = \mu_1(z)$, $\mu_2(zw) = \mu_2(z)$ ist, entsteht durch Komposition auf einem Intervalle (h, hw) eine Funktion des Typus $\frac{x^a}{y^{a+1}}\mu\left(x^{\frac{\alpha\alpha_1}{d}}\left|\frac{\beta\beta_1}{d}\right.\right)$, wobei $\mu(zw) = \mu(z)$ und d der größte gemeinsame Teiler von $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1$ ist.

G. Cimmino (Napoli).

Gray, Newton M.: The nuclear spin of Li^7 from hyperfine structure data. *Physic. Rev.*, II. s. 44, 570—574 (1933).

Die Hyperfeinstruktur der Linie $\lambda 5485$ ($1s 2s^3S - 1s 2p^3P$) im Spektrum von Li II wird neu berechnet, und zwar unter der Annahme, das der Kern von Li^7 einen Drehimpuls $i = 3/2$, 2 oder $5/2$ hat. Alle Wechselwirkungen der Elektronen untereinander und mit dem Kern werden in Rechnung gebracht. Der Vergleich mit der Erfahrung spricht eindeutig zugunsten des bisher angenommenen Wertes $i = 3/2$.

R. de L. Kronig (Groningen).

Stücklen, H.: Kältephysik und Physik des Atomkerns. *Naturwiss.* 21, 772—776 (1933).

Pincherle, Leo: Intensità delle linee X dovute a irraggiamento di quadrupolo. *Nuovo Cimento*, N. s. 10, 205—210 (1933).

Verf. berechnet die Intensitäten der Quadrupolübergänge im Röntgenspektrum. Das springende Elektron wird als in einem Thomas-Fermischen Zentralfeld befindlich angenommen, die Wechselwirkung mit den übrigen Elektronen also durch dies Feld ersetzt. Die Rechnung wird relativistisch nach Dirac durchgeführt. Für das Intensitätsverhältnis der Quadrupollinie $\beta_9(M_V \rightarrow L_I)$ und der Dipollinie $\beta_5(M_{III} \rightarrow L_I)$ ergibt sich z. B. bei Wolfram 11:100, in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert.

R. de L. Kronig (Groningen).

Carrelli, Antonio: Sull'azione di allargamento di linee spettrali per effetto di aumento di densità. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 3, 39—54 (1933).

The intensity distribution in a spectral line whose width is primarily due to perturbations of the emitting atom by neighbouring atoms is $I_\nu = N_{2, E_2} A_{2 \rightarrow 1} A_{E_2 \rightarrow E_1}$,

where the unperturbed line is due to a transition from state 2 to state 1 with probability $A_{2 \rightarrow 1}$, and $A_{E_2 \rightarrow E_1}$ is the probability of transition from a state of kinetic energy E_2 to kinetic energy E_1 , and N_{2, E_2} is the number of atoms in state 2 with kinetic energy E_2 . The probability $A_{E_2 \rightarrow E_1}$ is obtained by averaging over all encounters the quantity

$$A_{E_2 \rightarrow E_1}(a) = \int_a^\infty \psi_2(x, E_2) \bar{\psi}_1(x, E_1) dx,$$

where a is the distance of closed approach of the emitting atom to a perturbing atom, and $\psi(x, E)$ is the wave function for its translational motion, supposed rectilinear, with kinetic energy E , and ψ_1, ψ_2 apply to states 1, 2 respectively. We can take approximately

$$\psi_1(\lambda, E_1) = \text{const} \frac{1}{\sqrt{p_1}} \int \left\{ \exp \frac{2\pi i}{h} \int p_1(x) dx \right\} dx; \quad p_1(x) = \sqrt{2M\{E_1 - V_1(x)\}},$$

where $V_1(x)$ is the potential energy of the emitting atom, in state 1, in the perturbing field. Similarly for $\psi_2(x, E_2)$. This result has been considered by Weisskopf [Z. Physik 75, 287—301 (1932); see this Zbl. 4, 188]. The present author calculates $A_{E_2 \rightarrow E_1}$ for the following forms of $V_1(x)$, (1) $c_1 e^{-\alpha_1 x}$. (2) $b_1 \left(1 - \frac{2x_e}{x}\right)$, being the first approximation in the Kratzer form for two atoms forming a molecule at distance x_e . (3) c/x^6 being the polarisation potential given by London. *W. H. McCrea.*

Carrelli, Antonio: Sull'azione di allargamento di righe spettrali per effetto di aumento di densità. II. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 3, 101—109 (1933).

The author describes photometric measures of the arc emission spectra of sodium and potassium. He can explain certain features qualitatively on the theory of the formation of "quasi-molecules" Na_2, K_2 , due to the resultant effect of the attractive polarisation forces and repulsive exchange forces. *W. H. McCrea (London).*

Weisskopf, V. F. I.: The intensity and structure of spectral lines. Observatory 56, 291—308 (1933).

The paper gives a clear summary of the theory of natural line widths, oscillator strengths, and the Doppler line width, most of which is contained in previous papers by the author [see Physik. Z. 34, 1—24 (1933); see this Zbl. 6, 88]. It contains also a preliminary account of work on the light re-emitted by an atom under the influence of incident radiation. If this radiation is monochromatic and differs by a small amount Δ from a characteristic line of the atom given by a transition from state i to state k , and if the re-emission corresponds to a transition from state k to state l , then the emission line is double. For, owing to the natural widths of the levels the atom may absorb in a state at the centre of the i level, so that the excited state is one displaced from the centre of the k level by the amount Δ , and the emission line is then $k - \Delta \rightarrow l$; or the atom may absorb in a level displaced from the centre of the i level by amount Δ , so that the excited state corresponds to the centre of the k level, and the emission line is $k \rightarrow l$. It appears that the intermediate possibilities have much lower probability.

W. H. McCrea (London).

● **Handbuch der Physik. 2. Aufl. Hrsg. v. H. Geiger u. Karl Scheel. Bd. 23, 2. Tl. Röntgenstrahlung ausschließlich Röntgenoptik. Redig. v. H. Geiger. Berlin: Julius Springer 1933. IX, 541 S. u. 405 Abb. RM. 54.—.**

Ewald, P. P.: Die Erforschung des Aufbaues der Materie mit Röntgenstrahlen. S. 207—468 u. 249 Abb.

Es ist sehr zu begrüßen, daß in der zweiten Auflage der letzten Bände des Handbuchs von Geiger-Scheel auch der Artikel über die Erforschung des Aufbaues der Materie mit Röntgenstrahlen eine Neubearbeitung gefunden hat. Wie nötig eine solche war, geht aus der Vergrößerung des Umfangs von 175 auf 262 Seiten deutlich hervor, wobei noch berücksichtigt werden muß, daß die Zusammenstellung der erforschten Strukturen in der vorliegenden Auflage weggelassen wurde, da inzwischen der ausführliche Strukturbericht von Ewald und Hermann in der Z. Kristallogr. erschienen ist. Im folgenden sei deshalb vor allem auf die Erweiterungen

gegenüber der alten Auflage hingewiesen. Die ersten drei Abschnitte, die bzw. die Symmetrieklassen der Kristalle, die geometrischen Gittertypen, und die Interferenzen in idealen Kristallen behandeln, sind im wesentlichen dieselben geblieben. Nur die Fourierdarstellung der Gitter im zweiten Abschnitt wird viel eingehender behandelt. Im vierten Abschnitt über die Intensität der Röntgeninterferenzen ist die Theorie des Atomfaktors sehr erweitert. Hierzu sei bemerkt, daß die richtige Behandlung der anomalen Dispersion im Gebiet der Röntgenabsorption auch vom Referenten, und zwar schon etwas früher als von Kallmann und Mark, veröffentlicht wurde [s. J. Opt. Soc. Amer. **12**, 547 (1926)]. Im fünften Abschnitt über die experimentellen Verfahren der Strukturuntersuchungen ist die Beschreibung der Goniometermethode sowie der Laueaufnahmen mit großer Ablenkung neu. Schließlich bringt der sechste Abschnitt über die Strukturermittlung nach den verschiedenen Untersuchungsweisen neben den älteren Verfahren eine Besprechung der in den letzten Jahren entwickelten graphischen Hilfsmittel sowie der Aufschlüsse, welche die Intensitätsmessungen auf Grund unserer heutigen genaueren Kenntnis der Ladungsverteilung im Atom liefern. Hieran schließt sich eine kurze Übersicht über die chemischen und physikalischen Fragen, zu deren Klärung die Strukturuntersuchungen wesentlich beigetragen haben und von denen nur einige besonders wichtige hervorgehoben seien: chemische Bindungsfragen, das Problem der Polymerisation und der polymorphen Umwandlungen, Bestimmung der Atom- und Ionenradien, Möglichkeit der freien Drehbarkeit von Radikalen und Molekülen im Gitterverband, Auftreten von Lockerstellen, Natur der Mischkristalle, Untersuchung der plastischen Verformung. — Sowohl für den auf dem Gebiete der Kristallphysik Arbeitenden als auch für den allgemein physikalisch interessierten Leser dürfte der Beitrag eine schnelle Orientierung ermöglichen und viel Anregung bieten.

R. de L. Kronig (Groningen).

● **Debye, P.: Struktur der Materie. Vier Vorträge.** Leipzig: S. Hirzel 1933. 50 S. u. 21 Abb. RM. 3.—.

Für einen weiteren Kreis verständlich werden dargestellt die Bestimmungen der Molekelstruktur aus Interferenzen von Röntgenstrahlen und Kathodenstrahlen, die Messungen von Dipolmomenten von Molekeln, die Erforschung des molekularen Aufbaues von Flüssigkeiten und Untersuchungen über Elektrolyte. Viele der dargestellten Ergebnisse stammen von Debye selbst und seinen Schülern. *F. Hund* (Leipzig).

Evjen, H. M.: A new analysis of Slater's compressibility data. *Physic. Rev.*, II. s. **44**, 491—500 (1933).

Die experimentell gemessene Kompressibilität legt nur eine Ableitung (oder wenn sie über einen weiteren Bereich erstreckt wird, mehrere Ableitungen) der Gitterenergie als Funktion der Gitterkonstante fest. Durch eine Hypothese über die Beziehungen dieser Funktion für verschiedene Ionen kann man jedoch alle Messungen an Ionen eines Gittertypus im wesentlichen zur Bestimmung einer Funktion ausnutzen. Dies wird für die Alkalihalogenide durchgeführt, wobei die obengenannte Hypothese so eingeführt wird, daß die Kraft in erster Näherung eine universelle Funktion nicht des Abstandes der Atomzentren, sondern des Abstandes der „Atomränder“ voneinander ist, wobei man sich die Lage dieses Atomrandes etwa aus dem empirischen Wert der Gitterkonstanten bestimmen kann. In nächster Näherung variiert die Funktion aber noch mit dem Absolutwert des Atomradius. *R. Peierls* (Manchester).

Evjen, H. M.: A contribution to the theory of heteropolar crystals. *Physic. Rev.*, II. s. **44**, 501—509 (1933).

Die Stabilität eines idealen Gitters vom NaCl-Typ gegenüber einer weiteren Deformation wird in Frage gestellt. Es handelt sich um die Deformation, bei der die negativen Ionen eines geeigneten Teilgebiets relativ zu den positiven in Richtung einer Würfelkante verschoben werden. Die dabei entstehende Energieänderung läßt sich in zwei Teile zerlegen, von denen der eine von den abstoßenden Kräften herrührt und aus der gemessenen Kompressibilität bestimmt werden kann, während der andere von den elektrischen Kräften herkommt und die Kenntnis der atomaren Polarisierbarkeit verlangt. Die letztere kann mit Hilfe des Lorentz-Lorenzschen Gesetzes (dessen quantitative Gültigkeit doch wohl fraglich ist, d. Ref.) auf die Kenntnis des optischen Brechungsexponenten zurückgeführt werden. Trägt man also Kompressibilität und Brechungsexponent auf, so sollten alle existierenden Kristalle, wenn sie ideal sind, in einem bestimmten Gebiet dieser Ebene liegen. In Wirklichkeit fällt PbS aus diesem

Gebiet sehr weit heraus. Von den übrigen 8 betrachteten Salzen fallen 4 in das erwähnte Gebiet, während die vier anderen die Grenze des Gebietes um Beträge von im Maximum 20% überschreiten. Verf. zieht hieraus den Schluß, daß die Gleichgewichts-anordnung in diesen Fällen nicht die ideale sein kann. *R. Peierls (Manchester).*

Akulov, N., und E. Kondorsky: Über Mechanostriktion und ΔE -Effekt. *Z. Physik* 85, 661—671 (1933).

Die Heisenbergsche Methode wird zur Berechnung der Verteilung der Spinrichtungen über vier Richtungen leichtester Magnetisierung (Würfeldiagonale) bei Anwesenheit äußerer Felder und elastischer Spannungen angewandt und so der Anfang der Magnetisierungskurve, ihre Abhängigkeit von der elastischen Deformation und der Einfluß der Magnetisierung auf die elastischen Konstanten berechnet. *Peierls.*

Bloch, F.: Remarque sur un théorème de conservation dans la théorie des métaux. *J. Physique Radium*, VII. s. 4, 486—491 (1933).

Die Existenz eines Erhaltungssatzes für die Summe der Wellenzahlen von Elektronen und Schallquanten in einem Metall, die angezweifelt worden war, läßt sich auch beweisen, wenn man die elastischen Schwingungen nach stehenden (nicht nach fortschreitenden) Wellen zerlegt. *R. Peierls (Manchester).*

Lukirsky, P. I.: Über die Austrittsarbeit der Elektronen und die photoelektrischen Eigenschaften der Metalle. (9. Physik.-Chem. Tag., Moskau, Sitzg. v. 20.—24. IX. 1932.) *Physik. Z. Sowjetunion* 4, 212—238 (1933).

Bericht über die verschiedenen Vorstellungen über die Austrittsarbeit von Elektronen aus Metallen sowie einer Reihe von Versuchen aus dem Institut des Verf., durch Untersuchung von Kontaktpotential und Photoeffekt nähere Aufschlüsse über atomare Oberflächenschichten zu erhalten. *Nordheim (Paris).*

Kroll, Wolfgang: Zur Theorie der Druckabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle. *Z. Physik* 85, 398—402 (1933).

Nach einer von Nordheim angegebenen Modifikation der Blochschen Formel für den Widerstand von Metallen (deren theoretische Berechtigung diskutabel erscheint. D. Ref.) wird die Abhängigkeit des Widerstandes vom Druck berechnet. Der Einfluß aller derjenigen Größen, deren Druckabhängigkeit unbekannt ist, wird vernachlässigt, das Atompotential durch das Fermi-Thomasche approximiert, und auf diese Weise erhält man eine Formel, die keine unbestimmten Parameter enthält. Die Übereinstimmung mit der beobachteten Widerstandsänderung durch Druck ist bemerkenswert gut für Gold und Silber; für Lithium wird das anomale Vorzeichen richtig wiedergegeben. *R. Peierls (Manchester).*

Bethe, H., und H. Fröhlich: Magnetische Wechselwirkung der Metallelektronen. Zur Kritik der Theorie der Supraleitung von Frenkel. *Z. Physik* 85, 389—397 (1933).

In der Theorie von Frenkel war behauptet worden, daß infolge der magnetischen Wechselwirkung zwischen den Elektronen eine größere Impulsänderung nötig ist, um ein Elektron aus einem Strom von gleichgerichteten Elektronen zur Ruhe zu bringen, als ohne die Wechselwirkung. Verf. zeigen, daß zwar für den Elektronenstrom als ganzen die Trägheit in bekannter Weise durch die Selbstinduktion erhöht wird, daß aber trotzdem zur Änderung der Geschwindigkeit eines Elektrons nicht mehr Impuls aufzuwenden ist als wenn keine magnetische Wechselwirkung vorhanden wäre. Es wird gezeigt, daß auch die anderen Resultate der Leitfähigkeitstheorie durch die magnetische Wechselwirkung nicht erheblich beeinflußt werden. *R. Peierls (Manchester).*

Massey, H. S. W., and E. C. Bullard: The scattering of electrons by nitrogen molecules. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 29, 511—521 (1933).

Vergleich von älteren, unpublizierten Messungen der Verff. über die Winkelstreuung langsamer Elektronen (< 10 Volt) durch Stickstoff mit einer Theorie von Stier und theoretische und experimentelle Untersuchung der Streuung bei höheren Spannungen, wo die Elektronenwellenlänge klein wird gegen den N_2 -Kernabstand. Die Methode ist im wesentlichen die Bornsche mit gewissen auf das Problem zugeschnit-

tenen Verfeinerungen; als Potential wird das Thomas-Fermische nach Hund genommen. Die Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist bei höheren Spannungen (etwa 200—700 Volt) recht gut über den ganzen Winkelbereich mit Ausnahme kleiner Winkel; bei niedrigeren Spannungen beschränkt sie sich mehr und mehr auf größere Winkel ($>$ etwa 60°). Wessel (Jena).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Hallén, Erik: Allgemeine Theorie des elektrischen Schwingungskreises. Ark. Mat. Astron. Fys. 24 A, Nr 5, 1—38 (1933).

Verf. behandelt die elektrischen Eigenschwingungen eines Kreises, der aus einer Spule (kreisförmig) und einem angeschlossenen Kondensator besteht. Die genaue Berechnung dieser Eigenschwingungen wird auf die Lösung der homogenen Integrodifferentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{\left(\frac{x-\xi}{2a}\right)^2 + \sin^2 \psi}} + P^2 \int_{-1}^{+1} j(\xi) d\xi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\psi d\psi}{\sqrt{\left(\frac{x-\xi}{2a}\right)^2 + \sin^2 \psi}} = 0$$

mit der Randbedingung:

$$j(1) + j(-1) = \text{const} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\xi}{2a}\right)^2 + \sin^2 \psi}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1-\xi}{2a}\right)^2 + \sin^2 \psi}} \right) d\psi$$

zurückgeführt. Die Lösung wird bis ins einzelne numerisch ausgearbeitet und mit Experimentalergebnissen des Verf. in guter Übereinstimmung befunden.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Straub, Hans: Über selbsterregte nichtlineare Röhrenschwingungen. Helv. physica Acta 6, 337—382 u. 385—410 (1933).

Zwei dual entsprechende Röhrenschaltungen mit je einem als Hauptenergiespeicher fungierenden Schaltelement, welche selbsterregte Schwingungen liefern, werden theoretisch und experimentell untersucht. Im theoretischen Teil werden die Differentialgleichungen der Systeme abgeleitet, die nichtlinear und je nach der Vollständigkeit in der Berücksichtigung aller Schaltelemente von 2. oder 4. Ordnung sind. Die qualitative Integration nach Poincaré u. a., die das allgemeine Verhalten der Integralkurven gibt (Singularitäten, Grenzzyklen), wird für die Gleichung 2. Grades angedeutet. Für den allgemeinen Fall wird eine Entwicklung der Lösungen für kleine negative Werte des Dämpfungsparameters durchgeführt, an die sich in gleicher Näherung eine Berücksichtigung der Schwingungsdauer und Diskussion der Stabilität schließt. Danach ist im allgemeinen je nach der Form der nichtlinearen Kennlinie nur die Schwingung mit der tieferen Frequenz möglich, die dem größeren Energiespeicher entspricht, oder sowohl diese Schwingung wie der Gleichstromzustand, die „Schwebungslösung“, nur in Ausnahmefällen. Baerwald (Wembley).

Cady, W. G.: The application of methods of geometrical inversion to the solution of certain problems in electrical resonance. Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 68, 383—409 (1933).

Entwicklung einer graphischen Methode zur Herstellung der Frequenzcharakteristiken elektrischer Schaltungen, welche ein Resonanzelement kleiner Dämpfung enthalten, gegen das alle anderen Elemente in Umgebung der Resonanzfrequenz sehr langsam veränderlich sind. Diese Voraussetzungen treffen insbesondere bei piezoelektrischen und magnetostriktiven Resonatoren zu. Die Methode benutzt wiederholte Inversionen und Vektoradditionen. Das Besondere ist die Verwendung eines einzigen Kreises als Ortskurve für alle Impedanzen und Leitwerte an Stelle jedesmaliger Neu-

konstruktion; zur Invarianz dieses Ortes ist jedesmal nur ein Wechsel des Einheitsvektors erforderlich. Hierdurch wird die graphische Herstellung von Frequenzcharakteristiken oder Vektorfunktion anderer reeller Parameter grundlegend vereinfacht, wie an Beispielen aus der Theorie des Kristallresonators gezeigt wird. *Baerwald.*

Zuhrt, H.: Eine quasistationäre Berechnung der Eigenwellen einlagiger Flach- und Zylinderspulen. Tl. II. Arch. Elektrotechn. **27**, 729—742 (1933).

In vorliegender Arbeit behandelt Verf. das obengenannte Problem folgendermaßen. Die Spule von der wirklichen Länge $2l$ wird nach beiden Seiten um ein Stück verlängert, bis sie die Länge $2l_1$ besitzt. Die beiderseitigen Verlängerungsstücke werden stromlos angenommen. Die verlängerte Spule wird jetzt gespiegelt, und für den Strombelag wird sodann eine Fouriersche Reihe mit der Grundperiode $4l_1$ angenommen. Für das Potential im Innen- und im Außenraum werden Ansätze, bestehend aus Fourier-Bessel-Reihen bzw. Fourier-Hankel-Reihen, gemacht. Aus den Grenzbedingungen ergeben sich die Koeffizienten. Schließlich läßt Verf. die Grundperiode unendlich groß werden und erhält dann die Stromverteilung für eine Spule endlicher Länge. Hieraus werden die Eigenwellenlängen berechnet, und schließlich wird noch eine Näherungsformel für die Grundwelle angegeben. Vgl. mit Messungen und mit Berechnungen von Lenz stützen die Theorie. Referent möchte bemerken, daß Verf. die wichtigen Ergebnisse W. Steidingers [Arch. Elektrotechn. **13**, 237 (1924)] sowie von E. Hallén (Uppsala Univ., Arsskr. **1930**, Nr. 1), die beide das Spulenproblem in grundsätzlicher Weise mittels Integralgleichungen lösen und auch zu genauen numerischen Ergebnissen gelangt sind, mit Stillschweigen übergeht. (I. vgl. dies. Zbl. **7**, 271.)

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Dwight, H. B., and S. H. Chen: An extension of a Maxwell mutual-inductance formula to apply to thick solenoids. Physics **4**, 323—326 (1933).

Die Verff. erweitern die Maxwellsche Formel für die gegenseitige Induktivität zweier Solenoidspulen um einige Potenzglieder, mit Hilfe derer eine genauere Berechnung durchgeführt werden kann, als bisher möglich war. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Svetlov, A.: Sur la distribution du champ magnétique variable d'une spire annulaire en présence des conducteurs plans. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff **4**, 101—111 (1933) [Russisch].

Verf. betrachtet eine in der Ebene $z = 0$ liegende Drahtwindung bei Anwesenheit zweier leitenden Ebenen $z = a$ und $z = b$ mit endlicher Oberflächen-Leitfähigkeit. Es werden die durch den Strom in der Drahtwindung induzierten Flächenströme in den Ebenen sowie das magnetische Feld im ganzen Raum berechnet. *V. Fock.*

Stroganov, V.: Sur la distribution des courants générés dans le conducteur par le champ magnétique variable d'une spire annulaire. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff **4**, 113—119 (1933) [Russisch].

Verf. betrachtet eine unendlich dünne ringförmige in der Ebene $z = a$ liegende Drahtwindung in einem nichtleitenden Medium, das den oberen Halbraum ($z > 0$) ausfüllt; der untere Halbraum ($z < 0$) hat die Leitfähigkeit σ . Durch die Drahtwindung fließt der Strom $I = I_m e^{i\omega t}$. Es werden die im unteren Halbraum induzierten Ströme sowie das magnetische Feld im ganzen Raum berechnet und in Form bestimmter Integrale mit Besselschen Funktionen ausgedrückt. *V. Fock* (Leningrad).

Glowszki, E.: Entwurf und Beispiele symmetrischer Siebschaltungen nach der Methode von W. Cauer. I. Tief- und Hochpässe. Elektr. Nachr.-Techn. **10**, 377—386 (1933).

Glowszki, E.: Entwurf und Beispiele symmetrischer Siebschaltungen nach der Methode von W. Cauer. II. Tl. Bandfilter. Elektr. Nachr.-Techn. **10**, 404—415 (1933).

Rashevsky, N.: Some physico-mathematical aspects of nerve conduction. Physics **4**, 341—349 (1933).

Verf. nimmt als erstes Bild für einen Nerv an, daß er aus einer inneren leitenden Schicht und einer leitenden konzentrischen Schicht, getrennt durch eine nichtleitende Schicht, bestehe. Zwischen den leitenden Schichten entsteht infolge äußerer Einwirkung eine Potentialdifferenz,

welche einen Strom in der isolierenden Schicht zur Folge hat. Verf. leitet für die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieses Stromes eine Formel ab, deren numerische Auswertung Zahlen ergibt, welche mit experimentellen Ergebnissen im Einklang sind. Als zweites Bild für den Ausbreitungsmechanismus von Nervenreizungen betrachtet Verf. eine sprunghafte Ausbreitung des Stromes zwischen diskreten leitenden Knoten, welche in regelmäßigen Abständen auf der Länge verteilt sind. Er gelangt so zu einer Differenzengleichung für die Ausbreitung und nach Lösung derselben zu einer Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit, welche wieder Zahlenergebnisse zeitig im Einklang mit dem Experiment. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Shanklin, G. B., and F. H. Buller: The theory of oil-filled cable. Pt. II: Mathematical theory. Gen. electr. Rev. 34, 523—530 (1931).

Die hier gegebene Berechnung ölgefüllter Kabel umfaßt folgendes: Berechnung der stationären Temperatur; Berechnung der plötzlich auftretenden Übertemperaturen mittels Operatoren; Berechnung der benötigten Ölmenge; Berechnung des Öldruckverlaufs entlang einem Kabel. Die angewandten Methoden sind elementar. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Placinteanu, Ioan I.: Une statistique nouvelle pour les corpuscules à masses variables. Application au rayonnement thermique. Ann. Sci. Univ. Jassy 18, 281—289 (1933).

Die von T. Levi-Civita gegebene Statistik der Partikel von veränderlicher Masse [T. Levi-Civita, Pont. Acc. d. Nuovi Lincei 16 marzo 1930, Lincei Rend. Aprile 1930 (S. 626).] wird auf die Photonen angewandt. Die Energie eines Photons wird gleich $p^2/2m$ (p = Impuls, m = Masse) angenommen (!). Unter diesen Annahmen werden die Werte der Energiedichte, Photonenkonzentration, Entropie und Druck für die Wärmestrahlung berechnet. Daraus folgt z. B., daß in der Relation: Druck = $\frac{1}{3}$ · Energiedichte, der Faktor $\frac{1}{3}$ durch $\frac{4}{9}$ ersetzt werden muß. *Leontowitsch*.

Rutgers, A. J.: Zur Dispersionsstheorie des Schalles. Ann. Physik, V. F. 16, 350 bis 359 (1933).

Behandelt wird das Problem der Schallfortpflanzung in einem nicht dissoziierenden Gase, welches einen Anregungszustand (z. B. der molekularen Schwingung) besitzt, für den eine geringe Übergangswahrscheinlichkeit besteht. Ausgehend von der hydrodynamischen Wellengleichung, der Zustandsgleichung für ideale Gase, der Energiegleichung für adiabatische Vorgänge und der „Reaktionsgleichung“:

$$dn_2/dt = [\kappa_1(n_1/V)^2 - \kappa_2 n_1 n_2 / V^2] V$$

(n_1 und n_2 Anzahlen der normalen bzw. angeregten Moleküle, κ_1 und κ_2 Reaktionsgeschwindigkeiten) leitet der Verf. in genauer Analogie zu dem von Einstein behandelten Fall des dissoziierenden Gases eine Dispersionsformel ab, die mit der von anderen Autoren (Herzfeld und Rice; Kneser) angegebenen übereinstimmt, ohne die von jenen gemachten zusätzlichen Annahmen zu benötigen. Sie lautet:

$$f^2 = p/\varrho \left[1 + \frac{k_1}{k_2} \frac{C_v + \alpha C_5}{C_v^2 + \alpha C_5^2} \right]$$

($C_5 = C_v$ — Schwingungswärme; k = Boltzmannsche Konstante; $\alpha = (\omega m / \kappa_2 \varrho)^2$; m = Molekulargewicht). Die Rechnungen von Kneser werden eingehend kritisiert, die Dispersionsformel diskutiert und auf die experimentellen Resultate von Kneser angewandt. Das Problem der Schallabsorption wird nicht berührt. *H. O. Kneser*.

Kneser, H. O.: Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von A. J. Rutgers. Ann. Physik, V. F. 16, 360—361 (1933).

Die von Rutgers und Verf. [Ann. Physik, V. F. 11, 761 (1931); dies. Zbl. 3, 281 (1932)] gegebenen Ableitungen der Schalldispersionsformel werden verglichen. Die dabei gemachten Ansätze für die Geschwindigkeit der Entstehung der angeregten Moleküle werden diskutiert. *M. Leontowitsch* (Moskau).

Herzog, R. O., und H. C. Kudar: Zur kinetischen Theorie der Flüssigkeit. Z. Physik 80, 217—231 (1933).

Verff. versuchen die empirische Viskositätsformel von Batschinski $\eta = c(v - \omega)^{-1}$ (v = spez. Volumen, c und ω Konstanten) aus den Beziehungen von Jäger $\eta = \frac{RT}{v - b} \cdot \frac{r}{w}$

(r = Molekülradius, w = mittlere Geschwindigkeit der Moleküle) und Einstein $\eta = \frac{kT}{6\pi r D}$ (D = Diffusionskonstante) herzuleiten. Die Werte der freien Weglänge und des Diffusionskoeffizienten werden mit Hilfe der hydrodynamischen und gaskinetischen Methoden (unter Berücksichtigung der „Persistenz der Geschwindigkeiten“) berechnet. Die theoretischen Werte der Konstanten c und ω werden mit den empirischen verglichen. *M. Leontowitsch* (Moskau).

Damköhler, G.: Eine statistische Ableitung der Adsorptionsisotherme binärer Gasgemische. *Z. physik. Chem. B* **23**, 58–68 (1933).

Ein fester Körper, der von einem Gemisch aus zwei Gasen mit einem bestimmten Mischungsverhältnis umgeben ist, adsorbiert an der Oberfläche in monomolekularer Schicht N_1 Moleküle des einen und N_2 Moleküle des anderen Gases. Zu berechnen ist N_1 resp. N_2 als Funktion des Mischungsverhältnisses, des Druckes und der Temperatur im Gasraum. Um diese Aufgabe zu lösen, wird die freie Energie der Gasphase F und die der Adsorptionsschicht \bar{F} nach dem Gibbschen Verfahren aus den entsprechenden Zustandssummen berechnet und das Gleichgewicht aus der Bedingung $\delta F + \delta \bar{F} = 0$ bestimmt. Dabei wird angenommen, daß die Vertauschung zweier gleichartiger Moleküle im Gasraum zwei ununterscheidbare Zustände schafft, nicht aber die Vertauschung zweier gleichartiger Moleküle in der Adsorptionsschicht. Man erhält so eine allgemeine Formel für die Adsorptionsisotherme, die zunächst noch unbestimmte Koeffizienten enthält, die sich aus den Zustandssummen für spezielle Bewegungstypen der Teilchen berechnen lassen. Die Diskussion der Formel ergibt eine eindeutig bevorzugte Adsorption der einen Komponente im gesamten Konzentrationsgebiet in der Gasphase, bei Konstanthaltung dieser Konzentration Druckunabhängigkeit der Adsorption und eine bestimmte Temperaturabhängigkeit derselben, die an einem speziellen Beispiel genauer diskutiert wird. *Fürth* (Prag).

Satô, Mizuho: Entgegnung auf die Bemerkung K. Sittes zu meiner Abhandlung „Über den Einfluß der Wärmeströmung auf die Brownsche Bewegung. I.“ *Z. Physik* **85**, 676 (1933).

Der Verf. behauptet, daß die von Sitte [*Z. Physik* **83**, 266 (1933); dies. Zbl. **7**, 141] gegen seine Arbeit [*Z. Physik* **80**, 822 (1933); dies. Zbl. **6**, 281] erhobenen Einwände nicht zu Recht bestehen, da die von ihm verwendete Grenzbedingung an der Oberfläche des Teilchens von der von Sitte benützten verschieden sei. *Fürth* (Prag).

Sitte, Kurt: Zu der Entgegnung von Satô auf meine Bemerkungen zu seiner Arbeit „Über den Einfluß der Wärmeströmung auf die Brownsche Bewegung. I.“ *Z. Physik* **85**, 677–678 (1933).

Gegenüber der im vorstehenden Referat besprochenen Entgegnung von Satô wird auf die physikalische Unhaltbarkeit der von ihm verwendeten Grenzbedingung und neuerlich auf die Unzulänglichkeit der benützten Rechnungsmethode hingewiesen. Der Inhalt der Bemerkungen zu Satôs Arbeiten [*Z. Physik* **80**, 822; **83**, 412 (1933)] wird in vollem Umfang aufrechterhalten. (Vgl. dies. Zbl. **6**, 281 u. **7**, 142.) *Fürth*.

Satô, Mizuho: Zur Versinnlichung der Brownschen Bewegung. *Sci. Rep. Tôhoku Univ.*, I. s. **22**, 599–613 (1933).

Um die Gesetzmäßigkeiten der zweidimensionalen Brownschen Bewegung zu studieren, wird ein Modellapparat konstruiert, in dem geeignet geformte Platten durch die Stöße von dauernd in Bewegung gehaltenen Schrotkugeln gegen die Berandung der Platten in eine Art Brownscher Bewegung geraten. Im vorliegenden ersten Teil der Arbeit wird nach bekannten gastheoretischen Methoden die Brownsche Beweglichkeit B für Translations- und Rotationsbewegung von elliptischen, kreisförmigen, quadratischen und dreieckigen Platten berechnet, in die die „Dichte“ ϱ des Schrotkugelgases, die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} der Schrotkugeln und die linearen Dimensionen der Platte eingehen. Es ergeben sich Formeln von folgender Gestalt: Für die Translation $B = \frac{k}{\bar{v} \cdot \varrho \cdot a}$, für die Rotation $B = \frac{k}{\bar{v} \cdot \varrho \cdot a^3}$, worin k Zahlenkonstanten sind, die von der Gestalt der Platte abhängen, und a ein die Lineardimensionen messender Parameter ist. *Fürth*.